Rechenregeln der komplexen Zahlen

Es seien $a,\ b,\ c,\ ...$ reelle Zahlen, $\mathbb{C}$ sei die Menge aller geordneten Paare $[a,\ b]$. Mit $\mathbb{C}$ werden die Punkte in der xy-Ebene beschrieben. Die folgenden Definitionen zeigen, dass es möglich ist, die Paare $[a,\ b]$ selbst als Zahlen aufzufassen:
Man erhält in $\mathbb{C}$ eine Addition und eine Multiplikation, wenn man je zwei Paaren $[a,\ b]$ und $[c,\ d]$ eine Summe und ein Produkt zuordnet:

$$\begin{aligned} [a,\ b] + [c,\ d] &= [a+c,\ b+d] \\ [a,\ b]\cdot[c,\ d] &= [ac-bd,\ bc+ad] \end{aligned}$$

Die Definitionen der Summe und des Produktes sind so gewählt, dass alle für reelle Zahlen gültigen Rechengesetze auch beim Rechnen mit den Paaren $[a,\ b]$ gültig bleiben.

Die Distributivität soll nachgewiesen werden, es ist:

$$\begin{aligned} [a,\ b]\cdot([c,\ d]+[e,\ f]) &= [a(c+e)-b(d+f),\ b(c+e)+a(d+f)] \qquad \text{und} \\ [a,\ b]\cdot[c,\ d]+[a,\ b]\cdot[e,\ f] &= [(ac-bd)+(ae-bf),\ (bc+ad)+(be+af)] \end{aligned}$$

Da Distributivität für das Rechnen mit reellen Zahlen besteht, ist hieraus die Gültigkeit der Distributivität in $\mathbb{C}$ ersichtlich:

$$[a,\ b]\cdot([c,\ d]+[e,\ f]) = [a,\ b]\cdot[c,\ d]+[a,\ b]\cdot[e,\ f]$$

Die Elemente $[a,\ b]$ von $\mathbb{C}$ heißen *komplexe Zahlen*. Als Symbol für eine komplexe Zahl $[a,\ b]$ wird ein einziger Buchstabe z verwendet.
Betrachten wir nun die komplexen Zahlen der Form $[a,\ 0]$. Aus den Definitionen von Addition und Multiplikation folgt:

$$\begin{aligned} [a,\ 0]+[c,\ 0] &= [a+c,\ 0] \\ [a,\ 0]\cdot[c,\ 0] &= [ac-0\cdot 0,\ 0\cdot c+a\cdot 0] = [ac,\ 0] \end{aligned}$$

Hieraus ist zu erkennen, dass mit den Paaren $[a, 0]$ genau so gerechnet werden kann wie mit den reellen Zahlen. Man kann daher das Paar $[a,\ 0]$ mit der reellen Zahl a identifizieren. Demzufolge kann den Ausdrücken $a+[c,\ d]$ und $a\cdot[c,\ d]$ ein Sinn gegeben werden, nämlich

$$\begin{aligned} a+[c,\ d] &= [a,\ 0]+[c,\ d] = [a+c,\ d] \\ a\cdot[c,\ d] &= [a,\ 0]\cdot[c,\ d] = [ac-0\cdot d,\ 0\cdot c+ad] = [ac,\ ad] \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt, dass eine komplexe Zahl $z=[a,\ b]$ stets in der Form

$$z = [a,\ 0]+[0,\ b] = a\cdot[1,\ 0]+b\cdot[0,\ 1]$$

geschrieben werden kann.

$[1,\ 0]$ ist mit der reellen Zahl 1 zu identifizieren, das Paar $[0,\ 1]$ wird mit i abgekürzt. Damit ergibt sich für z die normierte Darstellung: $z = [a,\ b] = a+b\cdot i\,.$
a ist der *Realteil* von z, b der *Imaginärteil*; symbolisch: $a = Re\,[z],\ b = Im\,[z]$.
Komplexe Zahlen der Form $[0,\ b] = b\cdot i$ heißen *rein imaginär*, i ist die *imaginäre Einheit*. Die wichtigste Eigenschaft von i besteht darin, dass

$i^2 = [0,\ 1]\cdot[0,\ 1] = [0\cdot 0-1\cdot 1,\ 1\cdot 0+0\cdot 1] = [-1,\ 0] = -1$ ist.