

# Einheitswurzeln

Besonderes Interesse verdient die Gleichung

$$z^n = 1$$

Mit  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ergibt sich:

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = 1$$

und mit der *Formel von Moivre*:

$$z^n = r^n [\cos(n \varphi) + i \sin(n \varphi)] = 1$$

Für die 1 lauten die Polarformen:

$$1 = 1 \cdot [\cos(k \cdot 360^\circ) + i \sin(k \cdot 360^\circ)] \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

Durch Vergleich erhalten wir:

$$r = 1$$

$$n \varphi = k \cdot 360^\circ \quad k = 0, 1, \dots$$

Damit ergeben sich  $n$  verschiedene Lösungen:

$$z_k = \cos\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Beispiel:  $z^6 = 1$

$$z_0 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1$$

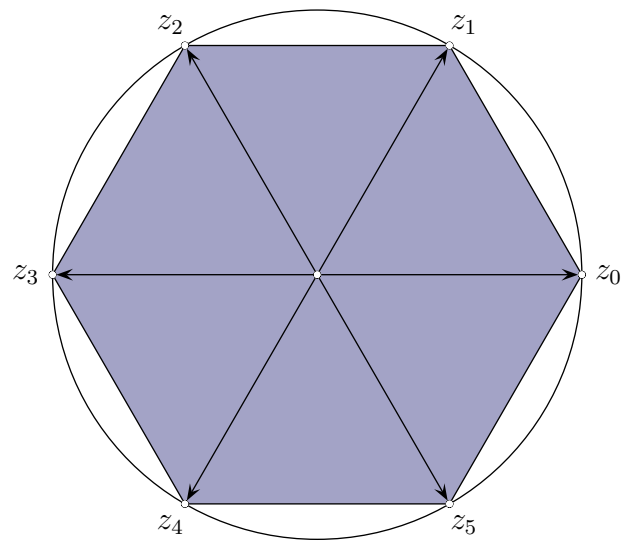
$$z_1 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$z_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$z_3 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1$$

$$z_4 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

$$z_5 = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$



*Satz von Gauß (1796)*

Ein regelmäßiges  $n$ -Eck kann genau dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, wenn die Primfaktorzerlegung von  $n$  die Form hat:

$$n = 2^k p_1 p_2 \dots p_s$$

Die Zweierpotenz darf beliebig sein; die Primzahlen müssen sämtlich voneinander verschieden sein und außerdem von der Art sein, daß  $p - 1$  eine Zweierpotenz ist.

Die Zahlen  $n$  unterhalb 50, für welche die Konstruktion durchführbar ist, lauten: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48.