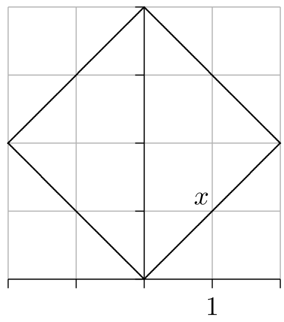
# Wurzeln

Wie lang ist die Quadratseite?




1. a) $\sqrt{49} = 7, \quad$ weil $7 \cdot 7 = 49$

   b) $\left(\sqrt{49}\,\right)^2 = 49 \quad$ *allgemein:* $(\sqrt{a}\,)^2 = a, \quad (a > 0)$

   c) $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

   d) $\sqrt{100a^2} = 10a, \quad (a > 0)$

   e) $\left(\sqrt{2}\,\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\,\sqrt{2}$

   f) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

   g) *allgemein:* $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

   h) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ *(teilweises Wurzelziehen)*

   i) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

   j) *allgemein:* $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   k) *es gilt jedoch <u>nicht</u>* $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

   l) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{2}^1\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \sqrt{2}$ *(Rationalmachen des Nenners)*

   m) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$

2. Zerlege wie in 1. h) :

   a) $\sqrt{40}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{48}$

3. Forme wie in 1. l) oder m) um:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 2}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{5} + 1}$

4. Löse die Klammern auf:

   a) $\left(\sqrt{2} + 3\right)^2$ b) $\left(4 - 3\sqrt{5}\,\right)^2$ c) $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\,\right)^2$

5. Löse die Gleichungen nach $x$ auf:

   a) $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3$ b) $(x + 5)(x - 4) = x + 16$

   c) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 34$ d) $(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 58$

   e) $x^2 - \dfrac{x^2 - 1}{2} = 13$ f) $\dfrac{x^2 + 5}{3} - \dfrac{x^2 - 1}{5} = 4$

   g) $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = a$ h) $x\sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4} = 1$

# Wurzeln

1. a) $\sqrt{49} = 7, \quad$ weil $7 \cdot 7 = 49$

   b) $\left(\sqrt{49}\,\right)^2 = 49 \qquad$ *allgemein:* $(\sqrt{a}\,)^2 = a, \quad (a > 0)$

   c) $3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

   d) $\sqrt{100a^2} = 10a, \quad (a > 0)$

   e) $\left(\sqrt{2}\,\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\,\sqrt{2}$

   f) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

   g) *allgemein:* $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

   h) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ *(teilweises Wurzelziehen)*

   i) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

   j) *allgemein:* $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   k) *es gilt jedoch <u>nicht</u>* $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

   l) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{2}^1\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \sqrt{2}$ *(Rationalmachen des Nenners)*

   m) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$

2. Zerlege wie in 1. h) :

   a) $\sqrt{40}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{45}$ d) $\sqrt{48}$

3. Forme wie in 1. l) oder m) um:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 2}$ d) $\dfrac{4}{\sqrt{5} + 1}$

4. Löse die Klammern auf:

   a) $\left(\sqrt{2} + 3\right)^2$ b) $\left(4 - 3\sqrt{5}\right)^2$ c) $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)^2$

5. Löse die Gleichungen nach $x$ auf:

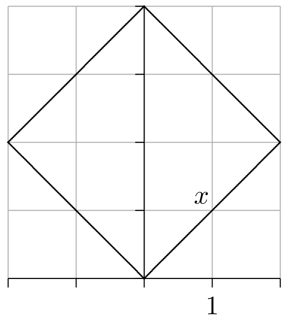
   a) $5x^2 - 6 = 4x^2 + 3$ b) $(x + 5)(x - 4) = x + 16$

   c) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 34$ d) $(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 58$

   e) $x^2 - \dfrac{x^2 - 1}{2} = 13$ f) $\dfrac{x^2 + 5}{3} - \dfrac{x^2 - 1}{5} = 4$

   g) $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = a$ h) $x\sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{4} = 1$

Wie lang ist die Quadratseite?




Lösung:
Aus der Zeichnung ist der Flächeninhalt des Quadrats sofort zu erkennen, er beträgt 8 Flächeneinheiten. Daher muss für $x$ gelten:

$$\begin{aligned} x^2 &= 8 \\ x &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

2. a) $\sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$

   b) $5\sqrt{2}$

   c) $3\sqrt{5}$

   d) $4\sqrt{3}$

3. a) $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

   b) $\sqrt{5}$

   c) $-\sqrt{3} - 2$

   d) $\sqrt{5} - 1$

4. a) $11 + 6\sqrt{2}$

   b) $61 - 24\sqrt{5}$

   c) $30 + 12\sqrt{6}$

5. a) $$\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

   b) $6\,;\ -6$

   c) $1\,;\ -1$

   d) $2\,;\ -2$

   e) $5\,;\ -5$

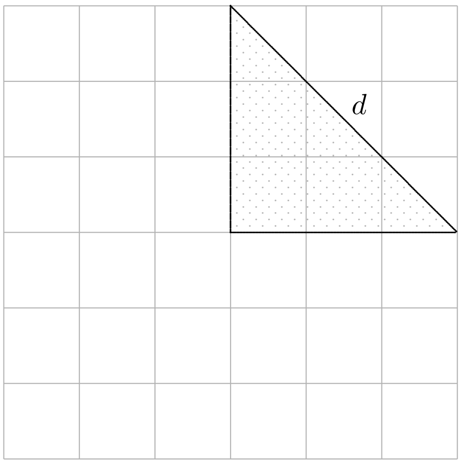
   f) $4\,;\ -4$

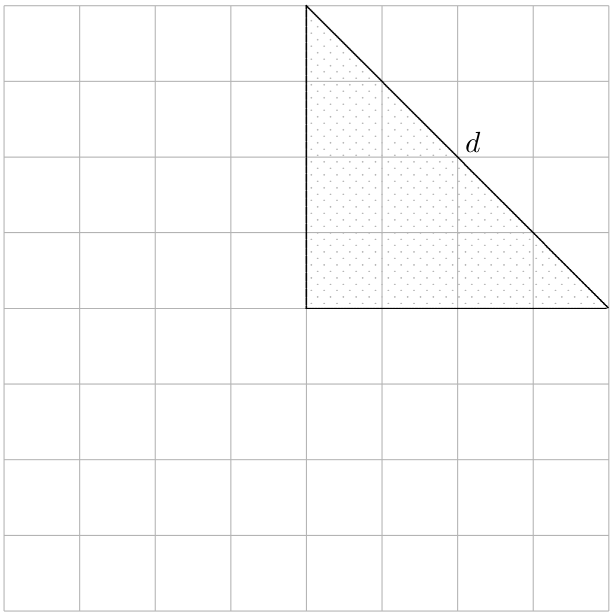
   g) $\dfrac{1}{(2 - a)^2}$

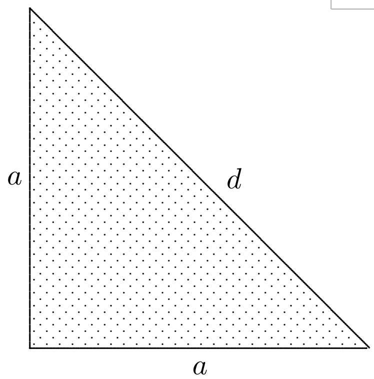
   h) $$\begin{aligned} x\sqrt{x} &= \frac{4}{3} \qquad \mid (\;)^2 \\ x^3 &= \frac{16}{9} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{16}{9}} \end{aligned}$$

# Zusammenhänge erkennen

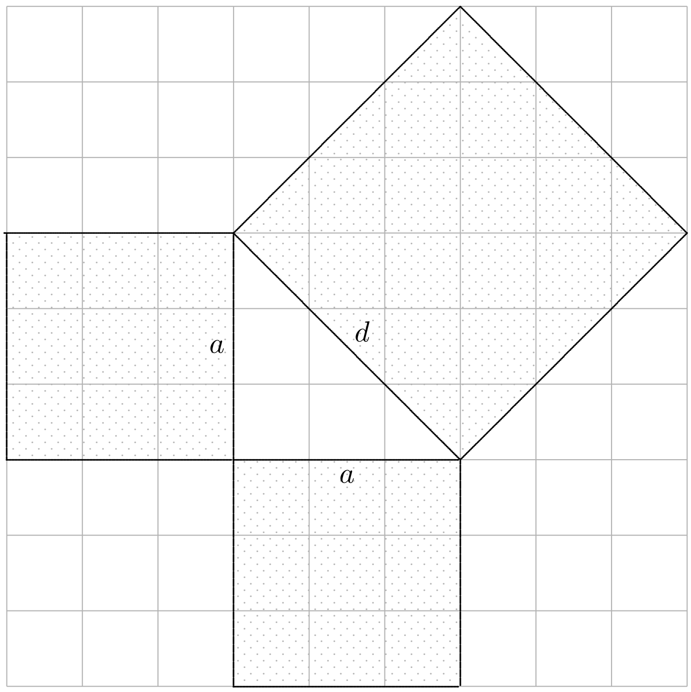
Ermittle $d$.



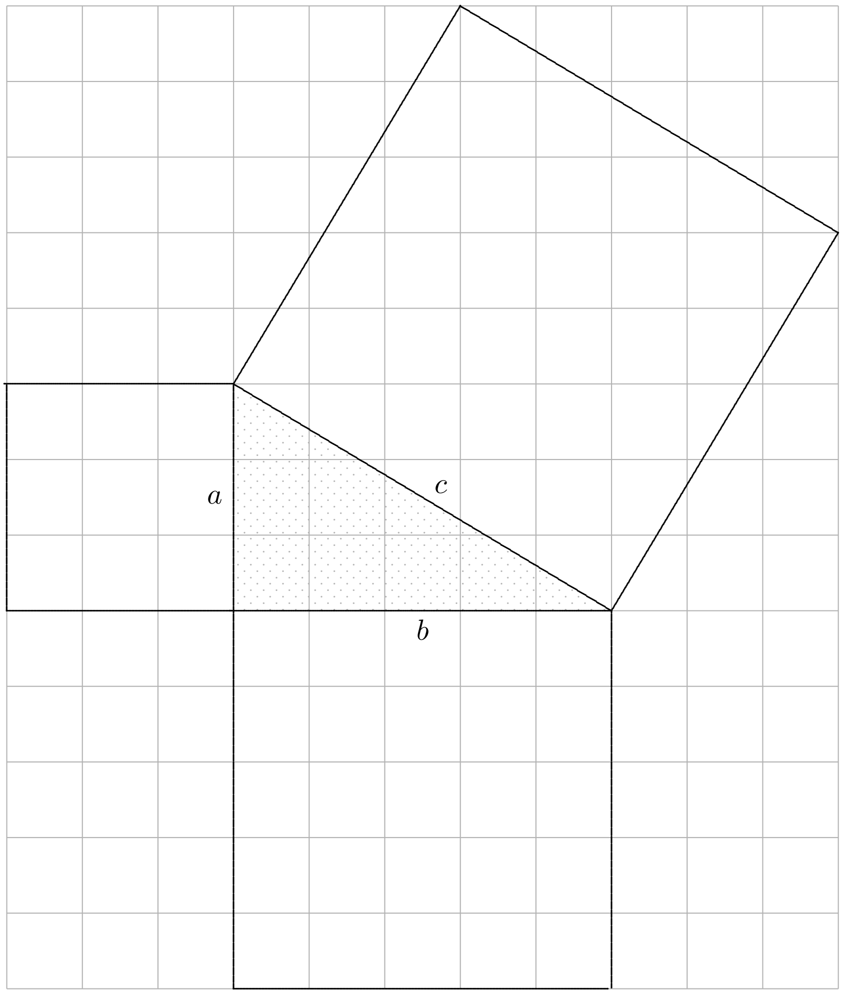



# Unmittelbar Einsichtiges



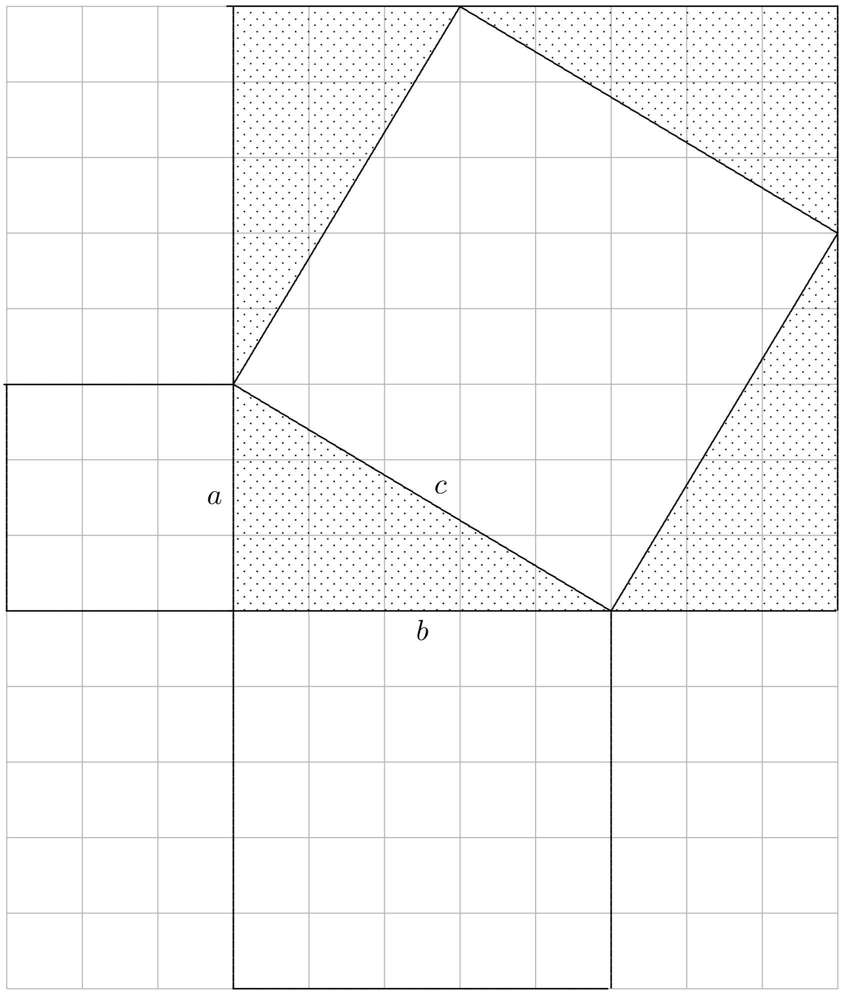

Begründe:
Um die Länge der Diagonale eines Quadrats zu erhalten, ist die Seitenlänge mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren.

# Verborgenes aufdecken




Ermittle den Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge $c$.
Tipp: Von etwas Größerem kann Überschüssiges subtrahiert werden.

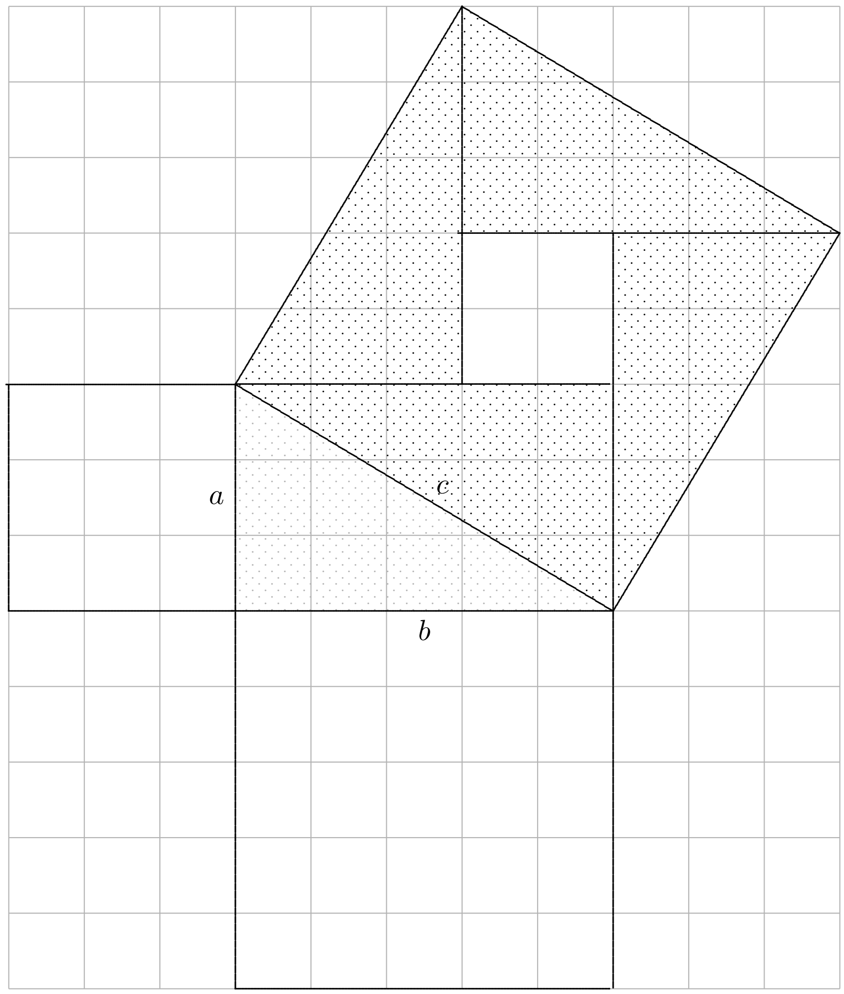
# Verborgenes aufgedeckt




Ermittle den Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge $c$.
Tipp: Von etwas Größerem kann Überschüssiges subtrahiert werden.

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab$$
$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

# Verborgenes aufgedeckt alternativ



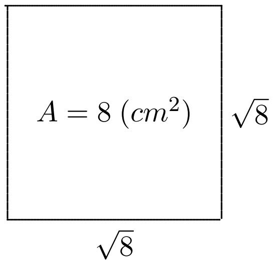

Ermittle den Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge $c$.

$c^2 = 2ab + (b-a)^2$

$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$

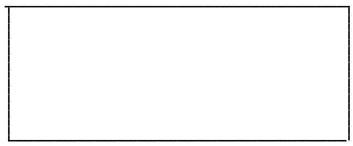
$c^2 = a^2 + b^2$

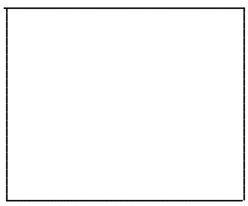
# Die $\sqrt{\phantom{x}}$-Taste ist tabu.

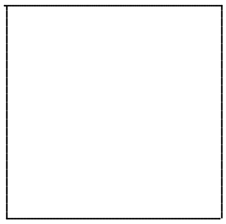



Um einen Näherungswert für $\sqrt{8}$ zu ermitteln, verwandeln wir das Rechteck

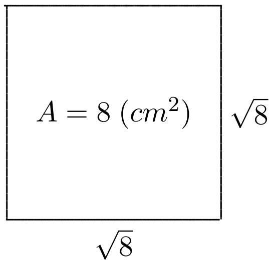
schrittweise mit immer gleicher Rechnung in das obige Quadrat.



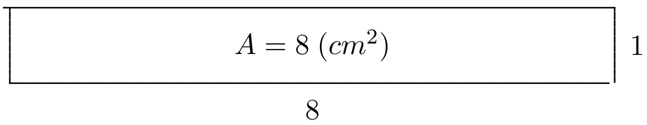




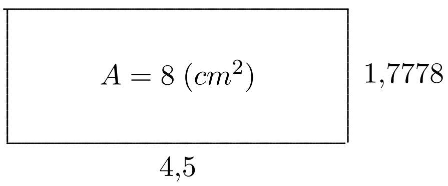
# Näherungsverfahren

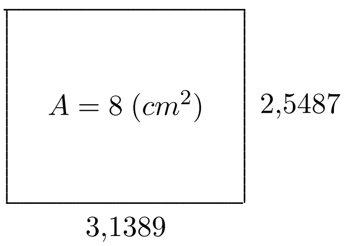


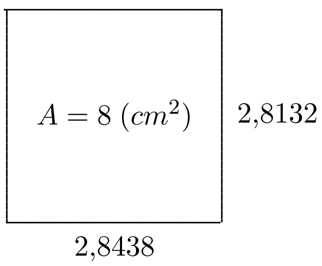

Um einen Näherungswert für $\sqrt{8}$ zu ermitteln, verwandeln wir das Rechteck



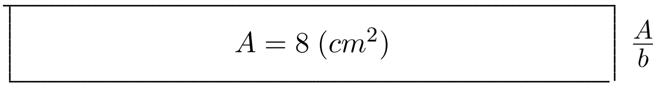

schrittweise mit immer gleicher Rechnung in das obige Quadrat.



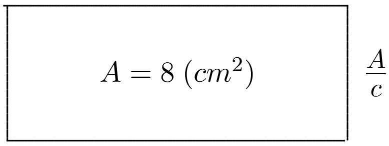



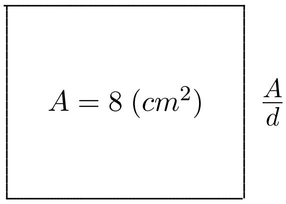
# Heronverfahren



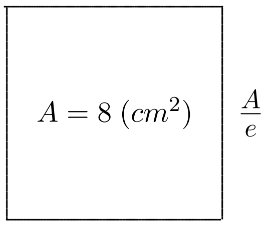

$b = 8$




$c = \frac{1}{2}(b + \frac{A}{b})$




$d = \frac{1}{2}(c + \frac{A}{c})$




$e = \frac{1}{2}(d + \frac{A}{d})$

GTR:
$8 \rightarrow B$
$\frac{1}{2}(B + \frac{8}{B}) \rightarrow B$,  ENTER-Taste (wiederholt)

Der Näherungswert wird durch Iteration bestimmt.
lat. iterare  wiederholt dasselbe tun