Quadratische Gleichung

Steht in einer Gleichung auf der einen Seite eine Null, so sehen wir zunächst nach, ob x oder eine Potenz von x (x^2, x^3, ...) ausgeklammert werden kann. Die größtmögliche Potenz von x, die in *jedem* Summanden enthalten ist, klammern wir aus. Es entsteht ein Produkt.

$$\begin{aligned} x^2+3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \\ x_1 = 0; \quad & x_2 = -3 \end{aligned}$$

Wenn ein Produkt Null ergeben soll,
so muss mindestens ein Faktor Null ergeben.

$$\begin{aligned} 2x^3-5x^2 &= 0 \\ x^2(2x-5) &= 0 \\ x_1 = 0; \quad & x_2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Die einzelnen Faktoren sind daher zu untersuchen, für welche x sie Null ergeben.

Liegt eine Gleichung in der Form $(x-3)(2x+5)=0$ vor, so kann die Lösung sofort angegeben werden:

$$x_1 = 3\,; \quad x_2 = -\,\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} -\,\frac{1}{4}x^4+x^3 &= 0 \\ x^3(-\,\frac{1}{4}x+1) &= 0 \\ x_1 = 0; \quad & x_2 = 4 \end{aligned}$$

Etwas schwieriger ist eine Gleichung zu lösen, falls nicht ausgeklammert werden kann, weil ein Summand ohne x vorhanden ist, wie z.B. in

$$x^2+6x-7=0$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf die Form $(x+3)^2=16$ gebracht werden. Da auf der rechten Seite eine 16 steht, müssen $x+3=4$ oder $x+3=-4$ sein. Daraus ergeben sich die beiden Lösungen $x_1=1$ und $x_2=-7$.

$$\begin{aligned} x^2+6x-7 &= 0 \quad |+7 \\ x^2+6x &= 7 \quad |+9 \\ x^2+6x+9 &= 16 \\ (x+3)^2 &= 16 \\ x_1+3=4; \quad & x_2+3=-4 \\ x_1=1; \quad & x_2=-7 \end{aligned}$$

Schreibt man dieses Verfahren allgemein für

$$x^2+px+q=0$$

auf, so ergibt sich eine Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen, die sogenannte *pq-Formel.*

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel: $x^2-8x+12=0$ Hier ist $p=-8$ und $q=12$.
Es gibt eine einfache Merkregel, um die Formel anzuwenden:

- Zahl vor x (hier -8) durch 2 teilen und Vorzeichen umkehren,
- Ergebnis (hier 4) quadrieren und unter die Wurzel schreiben,
- Vorzeichen der Zahl (hier 12) wechseln und unter die Wurzel schreiben.

$$\begin{aligned} x^2-8x+12 &= 0 \\ x_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16-12} \\ x_{1,2} &= 4 \pm 2 \\ x_1 = 6; \quad & x_2 = 2 \end{aligned}$$

Einfache Probe für das Ergebnis $x_1=6$; $x_2=2$:
Es ist $x_1 \cdot x_2 = 12$ und $x_1+x_2=8$, stets gilt:

$$x_1 \cdot x_2 = q \text{ und } x_1 + x_2 = -p$$

Zur weiteren Übung:

a) $x^2-4x-5=0$ b) $x^2-3x-10=0$

c) $2x^2-3x-5=0$ d) $x^2-7x=0$

e) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$ f) $ax^2+bx+c=0$

Die pq-Formel kann nur auf die Normalform $x^2+px+q=0$ angewendet werden. Falls die Gleichung z.B. mit $3x^2$ beginnt, so ist die Gleichung durch 3 zu teilen.

Beachte: $\frac{4}{3} : 2 = \frac{\cancel{4}^2}{3 \cdot \cancel{2}_1} = \frac{2}{3}$

Quadratische Gleichung

Zur weiteren Übung:

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$ b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ d) $x^2 - 7x = 0$

e) $\frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$ f) $ax^2 + bx + c = 0$

Lösungen:

a) $x_1 = 5\ ;\ x_2 = -1$ b) $x_1 = 5\ ;\ x_2 = -2$

c) $x_1 = \frac{5}{2}\ ;\ x_2 = -1$ d) $x_1 = 0\ ;\ x_2 = 7$

e) $x_1 = 0\ ;\ x_{2,3} = \pm 2$ f) $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

pq-Formel

$$
\begin{aligned}
x^2+6x-7 &= 0 \qquad |+7\\
x^2+6x &= 7 \qquad |+9\\
x^2+6x+9 &= 16\\
(x+3)^2 &= 16\\
x_1+3=4\,; &\qquad x_2+3=-4\\
x_1=1\,; &\qquad x_2=-7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+6x-7 &= 0 \qquad |+7\\
x^2+6x &= 7 \qquad |+\left(\tfrac{6}{2}\right)^2\\
x^2+6x+\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7\\
\left(x+\frac{6}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7\\
x_{1/2}+\frac{6}{2} &= \pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}\\
x_{1/2} &= -\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+px+q &= 0\\
x_{1/2} &= -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-q}
\end{aligned}
$$

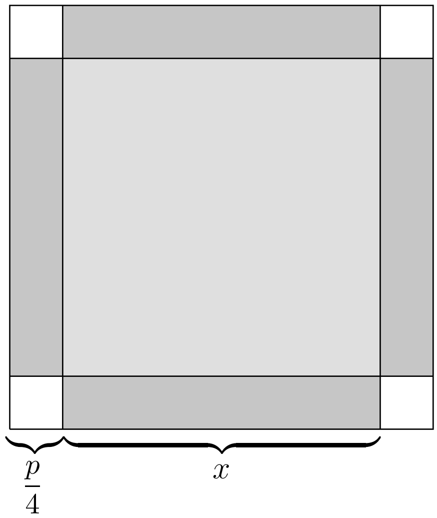
Vorzeichen umkehren

$$x^2+6x-7 = 0$$

durch 2 teilen und
Vorzeichen umkehren

$$x_{1/2} = -\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2+7}$$

quadrieren (negatives Vorzeichen fällt weg)



Der um 800 n. Chr. in Bagdad lebende Gelehrte al-Khwarizmi
fand für die graue Fläche q (1 Quadrat, 4 Rechtecke) die Beziehungen:

$$q = x^2 + px$$

$$x = \sqrt{q + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2} - \frac{p}{2}$$

Erläutere dies und stelle den Zusammenhang zum Vorigen her.

Quadratische Gleichung Typen

Typ 1

$x^2 - 3 = 0$

Zwischenschritt(e): Gleichung nach x^2 umstellen.
$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

Typ 2

$x(x - 3) = 0$

Lösungen sind ohne Rechnung erkennbar.
Die Gleichung könnte auch in der Form $x^2 - 3x = 0$ vorliegen.
$x_1 = 0;\ x_2 = 3$

Typ 3

$x(x - 2) = 3$

Nur hier ist die pq-Formel erforderlich.
Zwischenschritt: $x^2 - 2x - 3 = 0$
$x_1 = -1;\ x_2 = 3$

Quadratische Gleichung   Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$

2. $x^2 + 3x - 28 = 0$

3. $x^2 + 6x = 0$

4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$

5. $6x^2 - x = 1$

6. $x^2 - x - 6 = 0$

7. $x^2 + 9x + 20 = 0$

8. $x^2 - 5x = 0$

9. $3x^2 + 2x = 0$

Quadratische Gleichung Übung

1. $x^2 - 8x + 12 = 0$
2. $x^2 + 3x - 28 = 0$
3. $x^2 + 6x = 0$
4. $3x^2 + 4x + 1 = 0$
5. $6x^2 - x = 1$
6. $x^2 - x - 6 = 0$
7. $x^2 + 9x + 20 = 0$
8. $x^2 - 5x = 0$
9. $3x^2 + 2x = 0$

Lösungen

1. $6;\ 2$
2. $4;\ -7$
3. $0;\ -6$
4. $-1;\ -\frac{1}{3}$
5. $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}$
6. $3;\ -2$
7. $-4;\ -5$
8. $0;\ 5$
9. $0;\ -\frac{2}{3}$