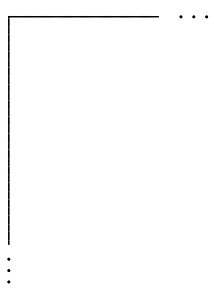
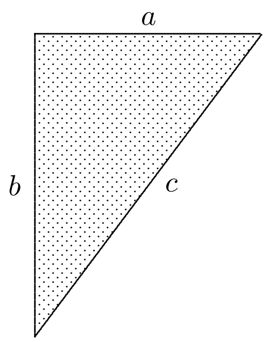
Pythagoras

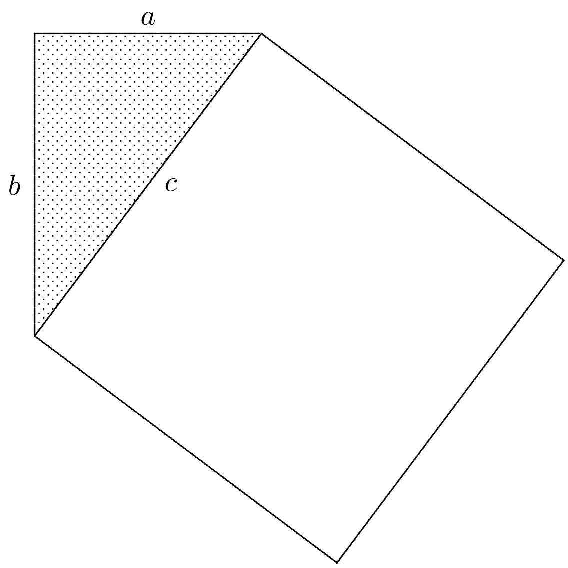
Suche ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen.

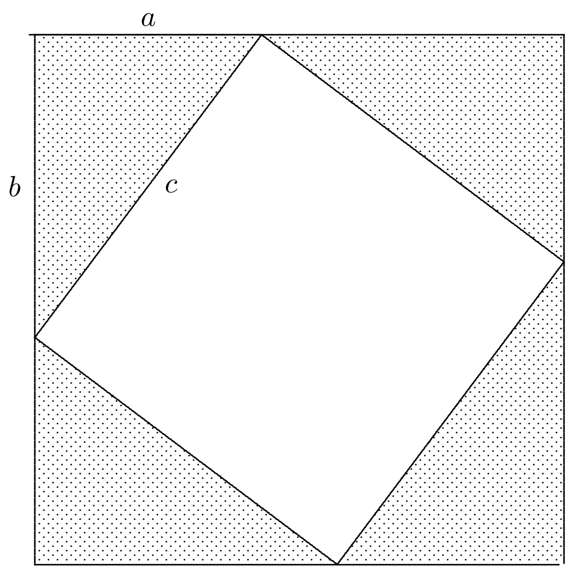


Pythagoras

Für ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 3$ und $b = 4$ (in cm) gilt vermutlich $c = 5$.
Weise diese Vermutung nach.
Tipp: Bestimme den Flächeninhalt des c-Quadrats.







Pythagoras

1. Wiederhole die Überlegungen der vorigen Seite mit

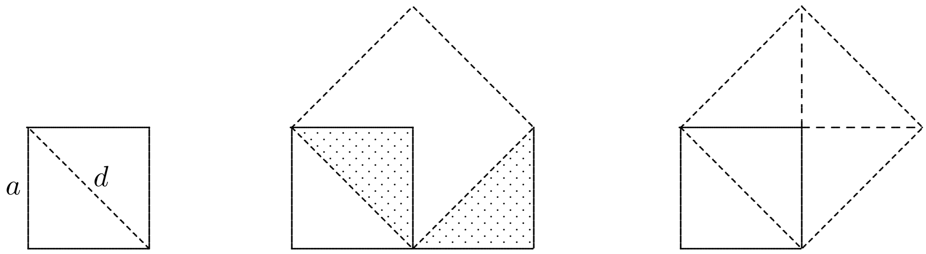
   (1) $a = 6$ und $b = 8$

   (2) $a = 5$ und $b = 12$

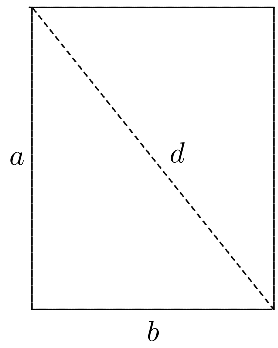
   und verallgemeinere sie.

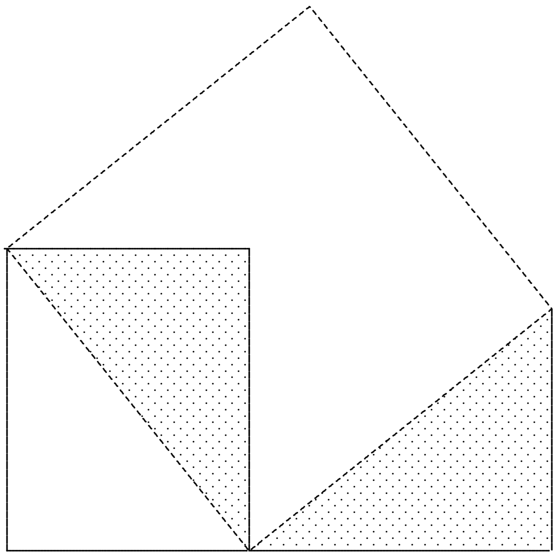
2. Begründe: Ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 6$, $b = 8$ und $c = 10$ ist rechtwinklig.

Pythagoras   alternativer Einstieg



1. Ein Quadrat hat die Seitenlänge $a = 2\ cm$.
   Wie lang ist die Diagonale d des Quadrats?



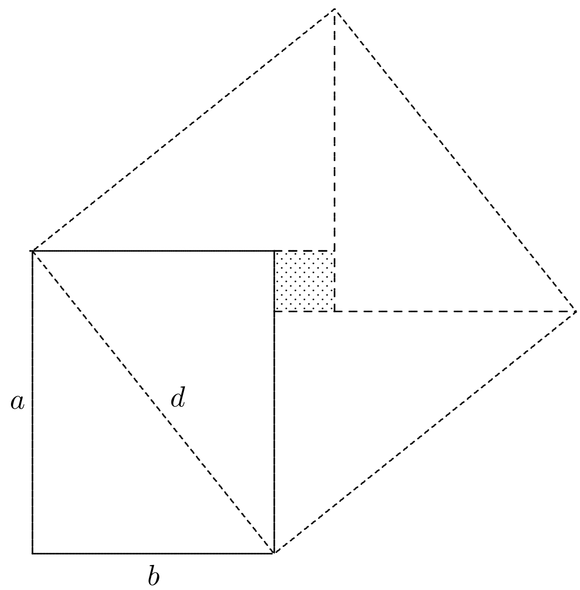


2. Ein Rechteck hat die Seitenlängen $a = 5\ cm$ und $b = 4\ cm$.
   Wie lang ist die Diagonale d ?

   Der Flächeninhalt des Quadrats über der Diagonalen beträgt:

$$\begin{aligned} A &= 2ab + (a-b)^2 \\ &= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



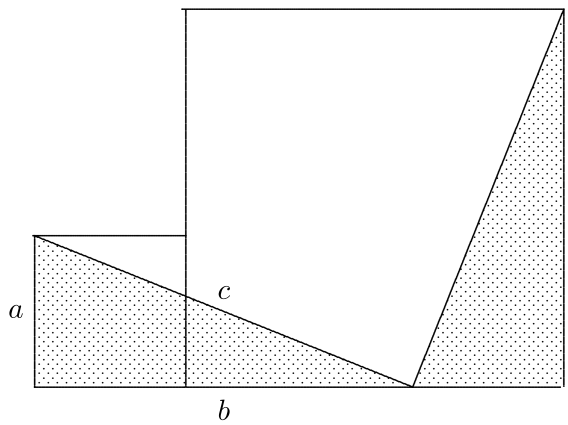
3. Ein Rechteck hat die Seitenlängen $a = 7\ cm$ und $b = 3\ cm$. Wie lang ist die Diagonale?

4. Ein Würfel hat die Kantenlänge $a = 2\ cm$.
   Wie lang ist die Raumdiagonale?

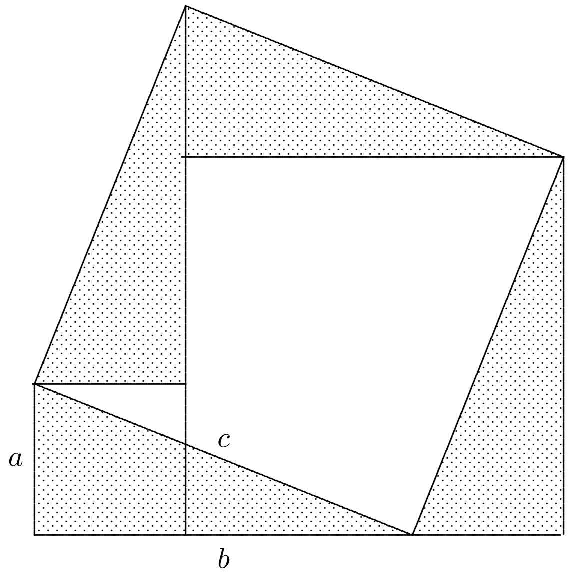
5. Ein Quader hat die Kantenlängen $a = 5\ cm$, $b = 4\ cm$ und $c = 3\ cm$.
   Wie lang ist eine Raumdiagonale?

Pythagoras 2. Beweis

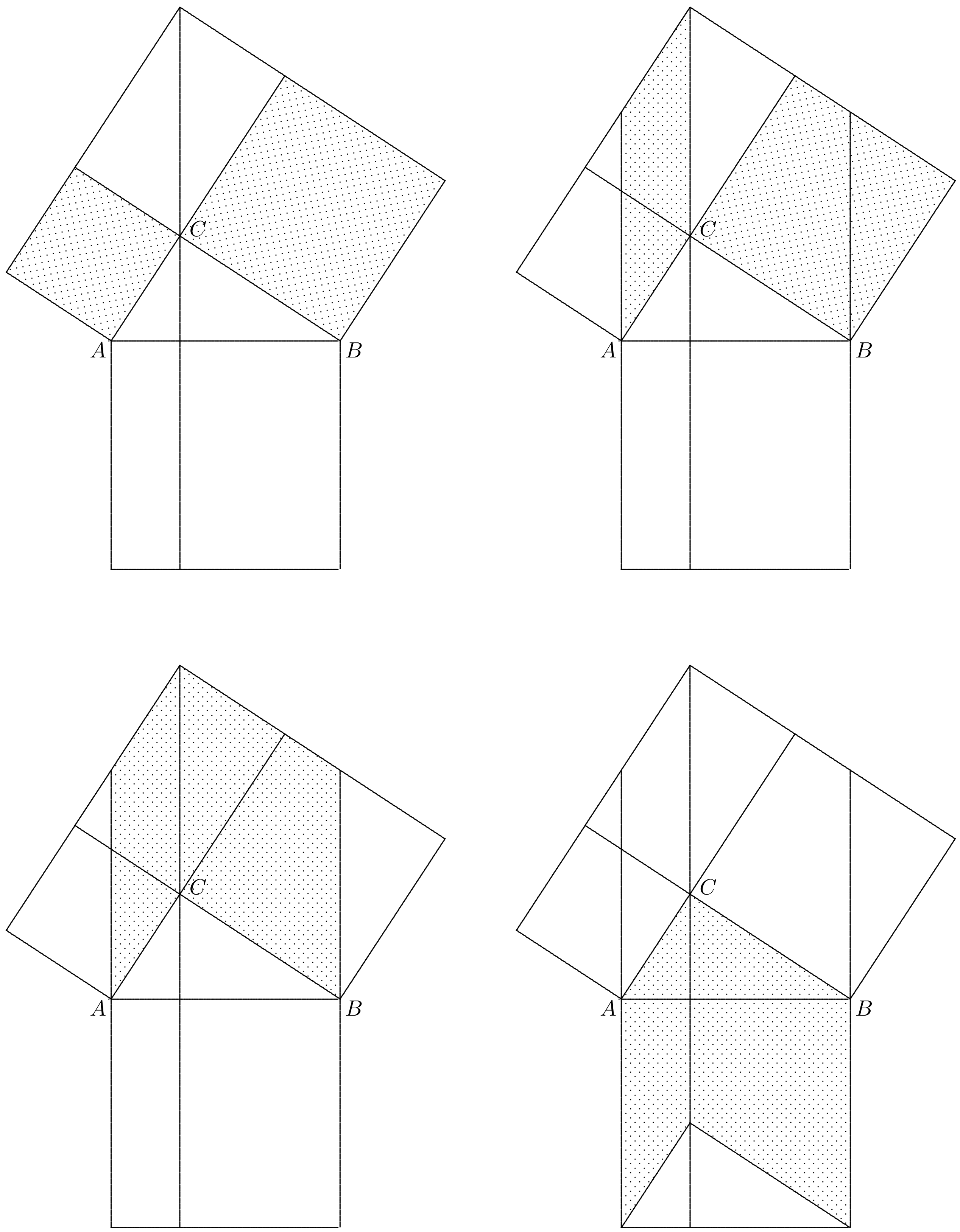
Begründe den Zusammenhang $a^2 + b^2 = c^2$ anhand der Figur.
Erläutere auch deren Zustandekommen und zeichne eine Beweis-Figur mit $a = 2\ cm$ und $b = 4\ cm$.



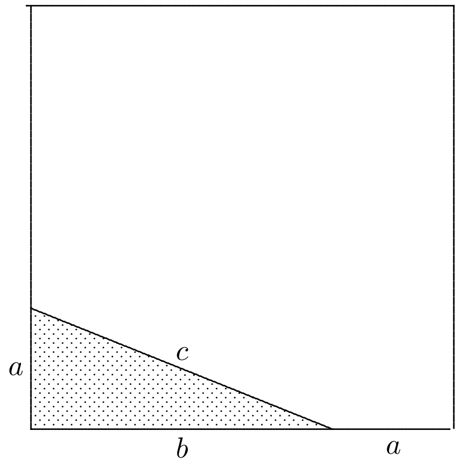
Pythagoras 2. Beweis Lösung

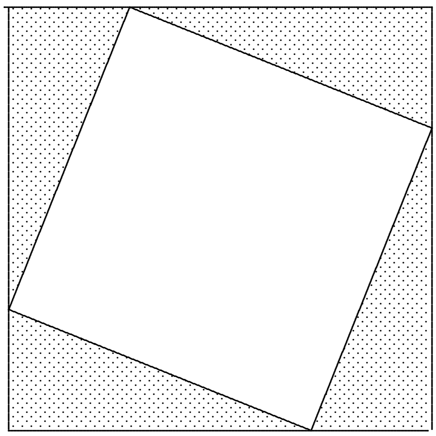


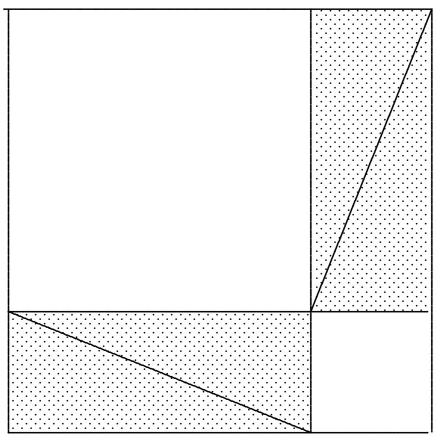
Pythagoras 3. Beweis



Pythagoras 4. Beweis



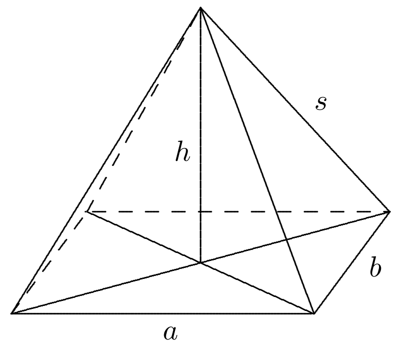


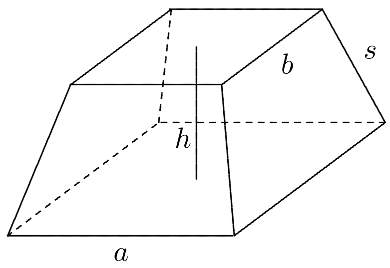


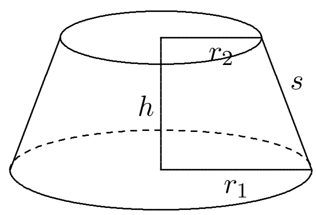
Pyramide, Pyramiden- und Kegelstumpf Übungsaufgaben

1. Von einer senkrechten Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sind gegeben (in cm):
   $a = 4$, $b = 2$ und $s = 3$.
   Gesucht sind die Pyramidenhöhe h und der Inhalt der Pyramidenseitenflächen.

   Ansätze zuerst stets mit Buchstaben!







2. Von einem quadratischen Pyramidenstumpf sind gegeben (in cm):
   $a = 4$, $b = 2$, $h = 1$, gesucht sind:

   a) Inhalt der Trapezseitenfläche

   b) Länge der Seitenkante s

3. Variation der 2. Aufgabe
   Gegeben sind: $a = 6$, $b = 4$, $h = 2$.

4. Von einem Kegelstumpf sind gegeben (in cm): $r_1 = 10$, $r_2 = 6$, $h = 5$,
   gesucht ist die Länge der Mantellinie s.

5. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Kathetenlängen gegeben, berechne die Länge der Hypotenuse.

   a) a, $2a$ b) $2a$, $6a$ c) $\sqrt{a}$, 4

   d) a, $\frac{a}{2}$ e) $\frac{3}{2}$, 2 f) 2,35; 4,67

1. Höhe der Pyramide: $h = 2$
   Höhen der Seitenflächen: $h_a = \sqrt{5}$, $h_b = 2\sqrt{2}$,
   Inhalte der Seitenflächen: $A_a = 2\sqrt{5}$, $A_b = 2\sqrt{2}$

2. a) $A_{\text{Trapez}} = 3\sqrt{2}$

   b) $s = \sqrt{3}$

3. a) $A_{\text{Trapez}} = 5\sqrt{5}$

   b) $s = \sqrt{6}$

4. $s = \sqrt{41}$

5. a) $a\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{10}a$ c) $\sqrt{16 + a}$

   d) $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ e) $\frac{5}{2}$ f) 5,23

Vielecke

1. Das Vieleck ist durch die Eckpunkte gegeben.
   Berechne den Flächeninhalt und den Umfang.

   a) $A(1\,|\,1),\ B(3\,|\,1),\ C(5\,|\,4),\ D(3\,|\,4)$

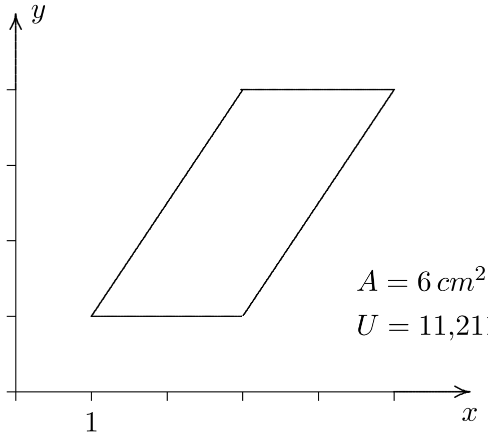
   b) $A(0\,|\,0),\ B(3\,|\,1),\ C(4\,|\,4),\ D(1\,|\,3)$

   c) $A(0\,|\,1),\ B(4\,|\,1),\ C(4\,|\,3),\ D(2\,|\,5)$

Vielecke Lösungen

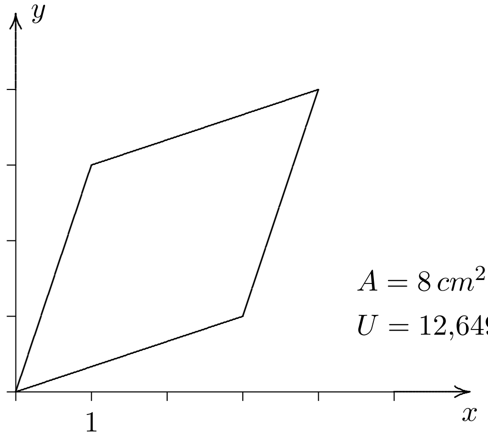
1. Das Vieleck ist durch die Eckpunkte gegeben.
   Berechne den Flächeninhalt und den Umfang.

   a) $A(1\,|\,1),\ B(3\,|\,1),\ C(5\,|\,4),\ D(3\,|\,4)$



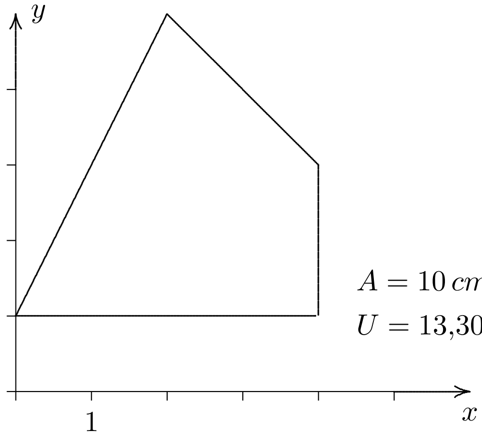
$A = 6\,cm^2$
$U = 11{,}211\,cm$

   b) $A(0\,|\,0),\ B(3\,|\,1),\ C(4\,|\,4),\ D(1\,|\,3)$



$A = 8\,cm^2$
$U = 12{,}649\,cm$

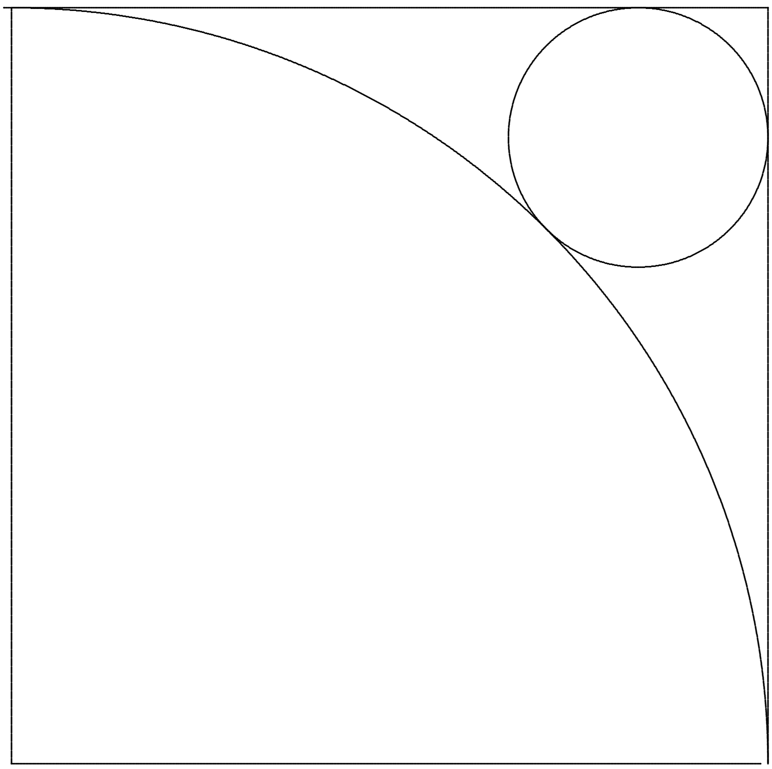
   c) $A(0\,|\,1),\ B(4\,|\,1),\ C(4\,|\,3),\ D(2\,|\,5)$



$A = 10\,cm^2$
$U = 13{,}301\,cm$

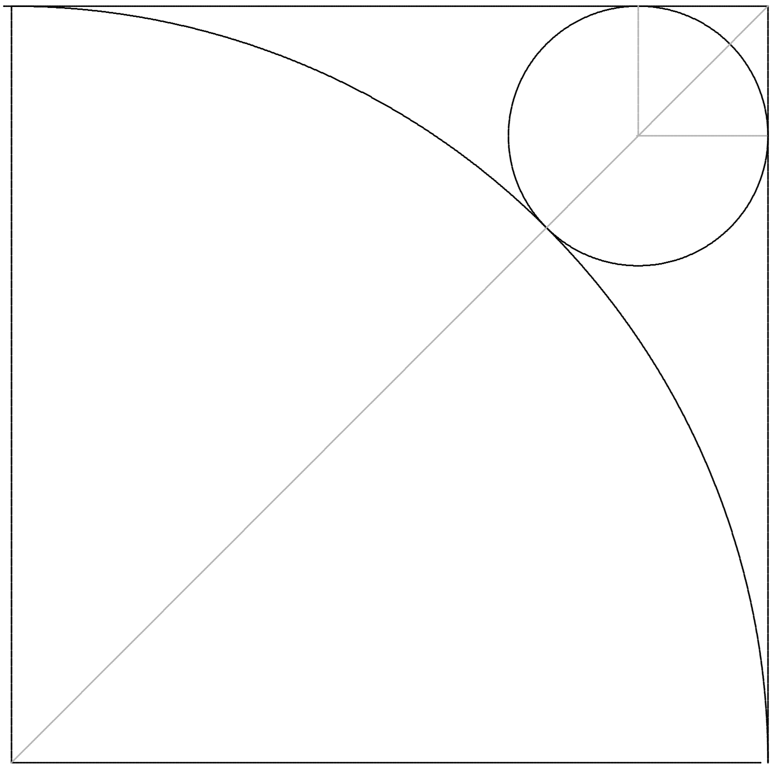
Berührender Kreis

Die Seitenlänge des Quadrats beträgt $10\,cm$.
Wie groß ist der Radius des kleinen Kreises?



Berührender Kreis

Die Seitenlänge des Quadrats beträgt $10\,cm$.
Wie groß ist der Radius des kleinen Kreises?



$$
\begin{aligned}
10\sqrt{2} - 10 &= r + r\sqrt{2} \\
r &= \frac{10(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} \\
&= 30 - 20\sqrt{2}
\end{aligned}
$$