Parabeln und Geraden

1. Gegeben ist die Parabel $y = -x^2 - 5x$
   und die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

   a) Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Parabel.

   b) Zeichne die Parabel und die Gerade in dasselbe Koordinatensystem.

   c) Bestimme die x- und y-Koordinaten der Schnittpunkte von Gerade und Parabel.

Parabeln und Geraden

1. Gegeben ist die Parabel $y = -x^2 - 5x$

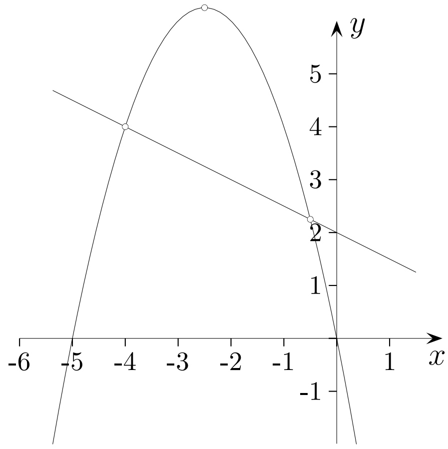
   und die Gerade $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

   a) Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Parabel.

   b) Zeichne die Parabel und die Gerade in dasselbe Koordinatensystem.

   c) Bestimme die x- und y-Koordinaten der Schnittpunkte von Gerade und Parabel.

Lösung:



Nullstellen der Parabel:
In den Nullstellen ist die y-Koordinate Null.

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 - 5x \quad | \cdot (-1) \\ 0 &= x^2 + 5x \\ 0 &= x(x+5) \\ & x_1 = 0 \qquad x_2 = -5 \end{aligned}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0\,|\,0)$, $N_2(-5\,|\,0)$

Scheitel der Parabel:
Um den Scheitel erkennen zu können, verwenden wir die Nullstellen.
Scheitel: $Max\left(-\dfrac{5}{2}\,\Big|\,\dfrac{25}{4}\right)$

Schnittpunkte von Parabel und Gerade:
In den Schnittpunkten stimmen die y-Koordinaten von Parabel und Gerade überein.

$$\begin{aligned} -x^2 - 5x &= -\tfrac{1}{2}x + 2 \quad | \cdot 2 \\ &\vdots \\ x^2 + \tfrac{9}{2}x + 2 &= 0 \\ & x_1 = -4 \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen der x-Werte in die Geraden- (oder Parabel-) Gleichung.

Schnittpunkte: $A(-4\,|\,4)$, $B\left(-\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{9}{4}\right)$

Aufgaben:

2. Aufgabenstellung wie in 1.

   a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad y = \frac{1}{2}x + 4$

   b) $y = x^2 - 3x, \quad y = -\frac{2}{3}x + 2$

   c) $y = -x^2 - 4x, \quad y = \frac{1}{4}x + 1$

   d) $y = -x^2 - x + 2, \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$

   e) $y = -x^2 - 2x + 3, \quad y = 2x + 7$

Parabeln und Geraden

1. Gegeben ist die Parabel $y = -x^2 - 5x$

   und die Gerade $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

   a) Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Parabel.

   b) Zeichne die Parabel und die Gerade in dasselbe Koordinatensystem.

   c) Bestimme die x- und y-Koordinaten der Schnittpunkte von Gerade und Parabel.

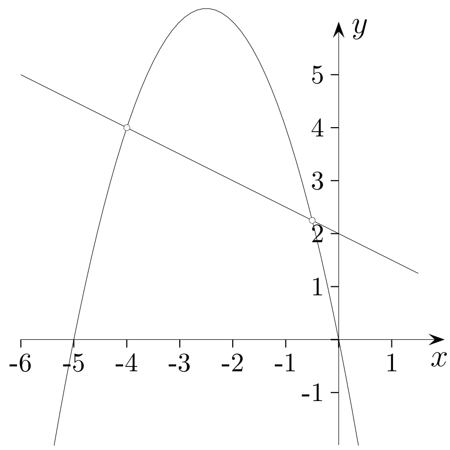
Lösung:

Scheitel der Parabel:

Um den Scheitel erkennen zu können, stellen wir die Scheitelform auf:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 5x && |\cdot(-1) \\ -y &= x^2 + 5x && |+(\tfrac{5}{2})^2 \\ -y + \tfrac{25}{4} &= (x+\tfrac{5}{2})^2 && |-\tfrac{25}{4} \\ -y &= (x+\tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} && |\cdot(-1) \\ y &= -(x+\tfrac{5}{2})^2 + \tfrac{25}{4} \end{aligned}$$

Scheitel: $Max\left(-\frac{5}{2} \mid \frac{25}{4}\right)$



Nullstellen der Parabel:

In den Nullstellen ist die y-Koordinate Null.

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 - 5x \quad |\cdot(-1) \\ 0 &= x^2 + 5x \\ 0 &= x(x+5) \\ & x_1 = 0 \qquad x_2 = -5 \end{aligned}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(0 \mid 0)$, $N_2(-5 \mid 0)$

Schnittpunkte von Parabel und Gerade:

In den Schnittpunkten stimmen die y-Koordinaten von Parabel und Gerade überein.

$$\begin{aligned} -x^2 - 5x &= -\tfrac{1}{2}x + 2 \quad |\cdot 2 \\ &\vdots \\ x^2 + \tfrac{9}{2}x + 2 &= 0 \\ & x_1 = -4 \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Die y-Werte ergeben sich durch Einsetzen der x-Werte in die Geraden- (oder Parabel-) Gleichung.

Schnittpunkte: $A(-4 \mid 4)$, $B\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{9}{4}\right)$

Aufgaben:

2. Aufgabenstellung wie in 1.

   a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad y = \frac{1}{2}x + 4$

   b) $y = x^2 - 3x, \quad y = -\frac{2}{3}x + 2$

   c) $y = -x^2 - 4x, \quad y = \frac{1}{4}x + 1$

   d) $y = -x^2 - x + 2, \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$

   e) $y = -x^2 - 2x + 3, \quad y = 2x + 7$

Parabeln und Geraden Ergebnisse

Aufgaben:

2. Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Parabel,
   sowie die x- und y-Koordinaten der Schnittpunkte von Gerade und Parabel.

   a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1, \quad y = \frac{1}{2}x + 4$

   b) $y = x^2 - 3x, \quad y = -\frac{2}{3}x + 2$

   c) $y = -x^2 - 4x, \quad y = \frac{1}{4}x + 1$

   d) $y = -x^2 - x + 2, \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$

   e) $y = -x^2 - 2x + 3, \quad y = 2x + 7$

Ergebnisse:

2. a) $Min(0 \mid 1)$, *keine Nullstellen*
   $A\left(3 \mid \frac{11}{2}\right)$, $B(-2 \mid 3)$

   b) $Min\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{9}{4}\right)$, $N_1(0 \mid 0)$, $N_2(3 \mid 0)$
   $A(3 \mid 0)$, $B\left(-\frac{2}{3} \mid \frac{22}{9}\right)$

   c) $Max(-2 \mid 4)$, $N_1(0 \mid 0)$, $N_2(-4 \mid 0)$
   $A(-4 \mid 0)$, $B\left(-\frac{1}{4} \mid \frac{15}{16}\right)$

   d) $Max\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{9}{4}\right)$, $N_1(-2 \mid 0)$, $N_2(1 \mid 0)$ $A(0 \mid 2)$, $B\left(\frac{1}{2} \mid \frac{5}{4}\right)$

   e) $Max(-1 \mid 4)$, $N_1(-3 \mid 0)$, $N_2(1 \mid 0)$
   $A(-2 \mid 3)$, *Gerade ist Tangente*