

Parabeln Einführung

Wir stellen uns vor, einen Stein von einem hohen Gebäude fallen zu lassen und interessieren uns für den Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und zurückgelegter Fallstrecke y (in Metern). Die Tabelle enthält mögliche Messwerte.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	5	20	45	80	125

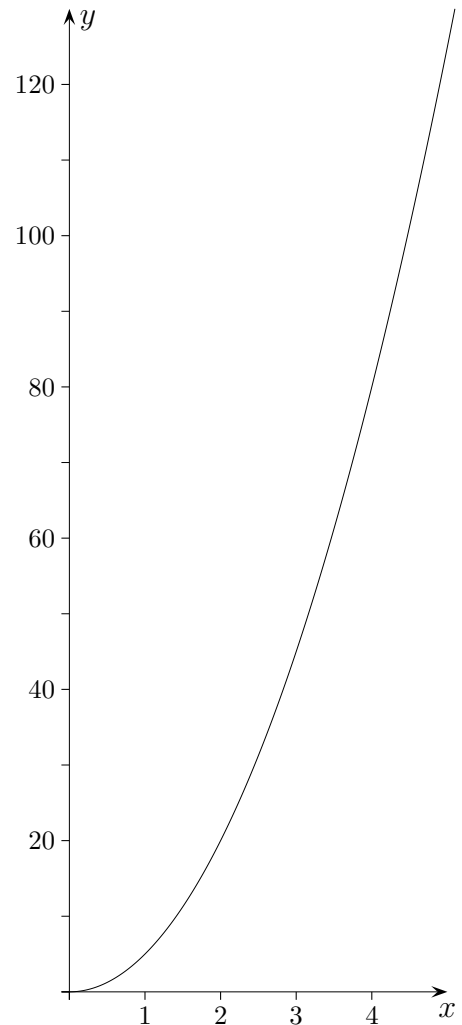
Um die Beziehung von x und y aufzudecken, teilen wir die y -Werte durch 5.

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{y}{5}$	0	1	4	9	16	25

Nun können wir erkennen, dass stets gilt:

$$\frac{y}{5} = x^2$$
$$y = 5 \cdot x^2$$

Der Zusammenhang kann durch einen Graphen veranschaulicht werden.



1. Lässt man einen Stein vom Schiefen Turm von Pisa fallen, schlägt er nach 3,35 Sekunden auf. Wie hoch ist der Turm?
2. Ein Stein fällt von einem 65 m hohen Turm. Wieviel Zeit verstreicht bis zum Auftreffen?
3. Variiere den *Parameter* a (beachte, er kann auch negativ sein) und beschreibe, welchen Einfluss er auf die Lage und Form der Parabel hat.

a) $y = ax^2$

b) $y = x^2 + a$

c) $y = (x - a)^2$

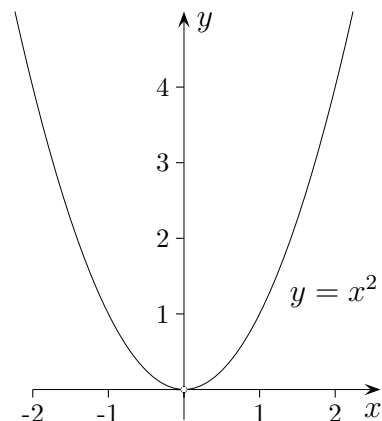
Parabeln

Zur Normalparabel gehört die Gleichung $y = x^2$.

Alle Punkte $P(x | y)$ der Parabel erfüllen diese Gleichung.

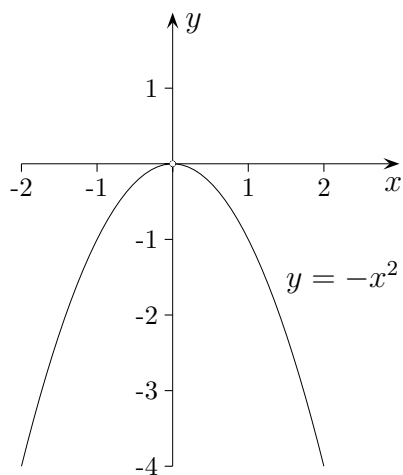
$$y = x^2$$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4


$$y = -x^2$$

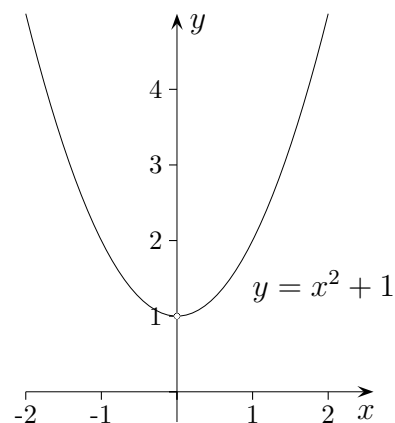
x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

Die Parabel $y = -x^2$ ist nach unten geöffnet, der Scheitel ist wieder $S(0 | 0)$.


$$y = x^2 + 1$$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

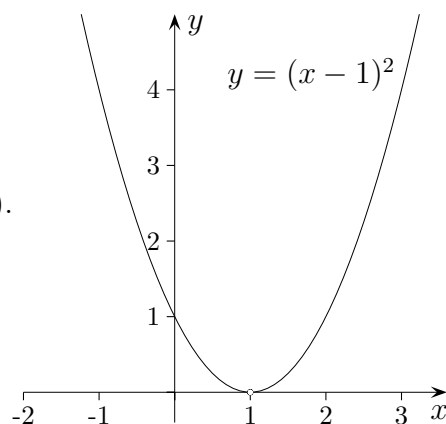
Aus der Wertetabelle ist ersichtlich, dass die Parabel $y = x^2 + 1$ gegenüber der Parabel $y = x^2$ um eine Einheit in y -Achsenrichtung verschoben ist, der Scheitel ist nun $S(0 | 1)$.



Parabeln

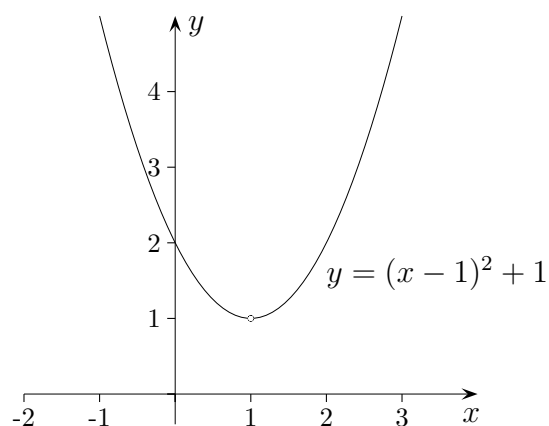
$$y = (x - 1)^2 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Die Parabel $y = (x - 1)^2$ ist gegenüber der Parabel $y = x^2$ um eine Einheit nach rechts verschoben, der Scheitel ist $S(1 | 0)$.



$$y = (x - 1)^2 + 1 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 10 & 5 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Die Parabel $y = (x - 1)^2 + 1$ ist gegenüber der Parabel $y = (x - 1)^2$ um eine Einheit in y -Achsenrichtung verschoben ist, der Scheitel ist $S(1 | 1)$.



1. Bestimme den Scheitel (Minimum bzw. Maximum) der Parabel:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $y = (x + 5)^2$ | b) $y = (x - 4)^2 - 2$ |
| c) $y = x^2 - 2x$ | d) $y = x^2 - 8x + 12$ |
| e) $y = x^2 + 10x + 30$ | f) $y = x^2 + 4x$ |
| g) $y = -x^2 - 2x$ | h) $y = -x^2 + 6x - 5$ |

2. Bestimme die Nullstellen der Parabel:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| a) $y = x^2 - x - 20$ | b) $y = 2x^2 - 5x - 3$ |
|-----------------------|------------------------|

Parabeln

Wie kann die Scheitelform der Parabel $y = x^2 - 6x + 5$ ermittelt werden?

Wir addieren auf beiden Seiten die binomische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 5 && | +9 \\ y + 9 &= x^2 - 6x + 9 + 5 \\ y + 9 &= (x - 3)^2 + 5 && | -9 \\ y &= (x - 3)^2 - 4 \\ &S(3 | -4) \end{aligned}$$

1. Bestimme den Scheitel (Minimum bzw. Maximum) der Parabel:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $y = (x + 5)^2$ | b) $y = (x - 4)^2 - 2$ |
| c) $y = x^2 - 2x$ | d) $y = x^2 - 8x + 12$ |
| e) $y = x^2 + 10x + 30$ | f) $y = x^2 + 4x$ |
| g) $y = -x^2 - 2x$ | h) $y = -x^2 + 6x - 5$ |

2. Bestimme die Nullstellen der Parabel:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| a) $y = x^2 - x - 20$ | b) $y = 2x^2 - 5x - 3$ |
|-----------------------|------------------------|

Ergebnisse:

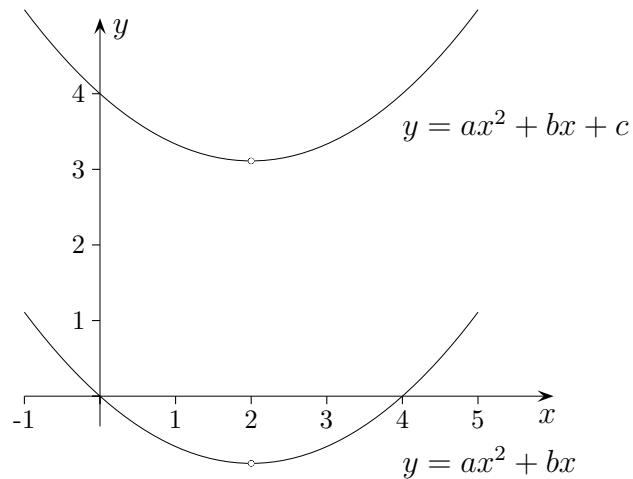
- | | |
|---------------------|-------------------|
| 1. a) $Min(-5 0)$ | b) $Min(4 -2)$ |
| c) $Min(1 -1)$ | d) $Min(4 -4)$ |
| e) $Min(-5 5)$ | f) $Min(-2 -4)$ |
| g) $Max(-1 1)$ | h) $Max(3 4)$ |

Die Nullstellen sind die Schnittstellen mit der x -Achse.
Der y -Wert ist hier wie groß?

- | |
|----------------------------------|
| 2. a) $x_1 = 5; x_2 = -4$ |
| b) $x_1 = 3; x_2 = -\frac{1}{2}$ |

Scheitel einer Parabel

Der x -Wert des Scheitels kann auch ohne binomische Ergänzung ermittelt werden.
Entnehme dem Folgenden die zu Grunde liegende Idee.



Nullstellen der Parabel $y = ax^2 + bx$

In den Nullstellen ist die y -Koordinate Null.

$$0 = ax^2 + bx$$

$$0 = x(ax + b)$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\implies x_{\text{Scheitel}} = -\frac{b}{2a}$$

Beispiele:

1. $y = x^2 - 6x + 13$ $S(3 | 4)$

2. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ $S(4 | -5)$

3. $y = 3x^2 + 12x + 5$ $S(-2 | -7)$

4. $y = -x^2 + 8x - 6$ $S(4 | 10)$

Der x -Wert des Scheitels kann unmittelbar angegeben werden.
Entnehme dem Folgenden die zu Grunde liegende Idee.

Nullstellen:

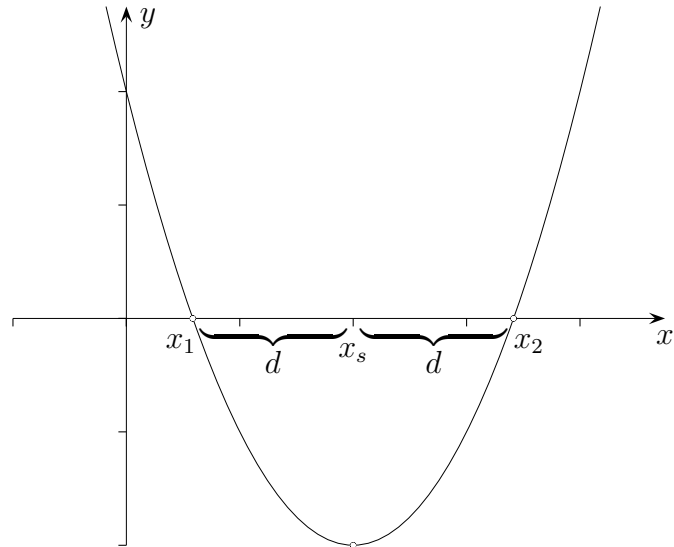
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

pq -Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \underbrace{\sqrt{\quad}}_d$$

$$\implies x_{\text{Scheitel}} = -\frac{b}{2a}$$



Parabeln, die keine Nullstellen haben, können in y -Richtung verschoben werden, jedoch geht c nicht in die Rechnung ein.

Beispiele:

1. $y = 2x^2 + 8x + 1$ $S(-2 \mid \dots)$

2. $y = \frac{1}{4}x^2 + 6x - 3$ $S(-12 \mid \dots)$

3. $y = 3x^2 - \frac{1}{5}x + 5$ $S(\frac{1}{30} \mid \dots)$

4. $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 6$ $S(\frac{2}{3} \mid \dots)$