Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Eine alte chinesische Aufgabe lautet:

In einem Stall befinden sich 35 Tiere, und zwar Hühner und Kaninchen. Die Tiere haben zusammen 94 Beine. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen sind in dem Stall?

Lösungsansatz:
Sei x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Kaninchen. Die Fragestellung führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 35 \\ 2x & + & 4y & = & 94 \end{array}$$

Um erkennen zu können, wie ein Gleichungssystem gelöst werden kann, betrachten wir zunächst ein einfacheres Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 5 \\ x & - & 3y & = & -1 \\ \hline 2x & & & = & 4 \\ & & x & = & 2 \\ & & y & = & 1 \end{array}$$

Die Addition der linken und rechten Seiten führt zu einer Gleichung, die nur noch <u>eine</u> Variable enthält und daher direkt gelöst werden kann.

$x = 2$ wird in eine Gleichung, z.B. $x + 3y = 5$, eingesetzt, um $y = 1$ zu erhalten.

Betrachten wir nun ein allgemeineres Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr|l} 5x & + & 2y & = & 9 & \cdot 3 \\ 2x & - & 3y & = & -4 & \cdot 2 \\ \hline 15x & + & 6y & = & 27 & \\ 4x & - & 6y & = & -8 & \\ \hline 19x & & & = & 19 & \\ & & x & = & 1 & \\ & & y & = & 2 & \end{array}$$

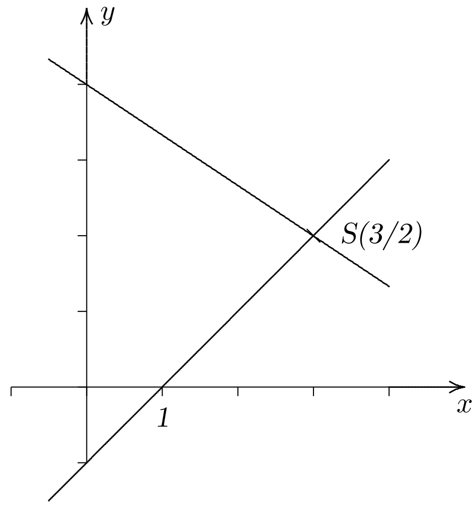
Durch geeignete Multiplikation kann erreicht werden, dass nach der Addition eine Variable herausfällt.

Das folgende Gleichungssystem soll graphisch gelöst werden.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 12 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$$

Hierzu lösen wir die Gleichungen nach y auf und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{2}{3}x + 4 \\ y & = & x - 1 \end{array}$$



Weitere Aufgaben: (rechnerische Lösung)

a) $\begin{array}{rcrcr} 7x & - & 3y & = & 11 \\ 5x & + & 8y & = & 18 \end{array}$

b) $\begin{array}{rcrcr} \frac{3}{2}x & - & 2y & = & 9 \\ \frac{2}{5}x & + & \frac{1}{3}y & = & 5 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcl} 2x & = & 10 - 4(y+2) \\ 3x & = & 6 - 3(y-5) \end{array}$

d) $\begin{array}{rcl} \frac{4}{5}(x-2) & = & 8 - 4y \\ \frac{2}{3}(x-3) & = & 6 - y \end{array}$

Lösungen:

a) $x = 2;\ y = 1$ *b)* $x = 10;\ y = 3$

c) $x = 13;\ y = -6$ *d)* $x = 12;\ y = 0$

Die Lösung der chinesischen Aufgabe lautet: $x = 23;\ y = 12$

Gleichungssysteme mit dem GTR lösen

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 2y & = & 9 \\ 2x & - & 3y & = & -4 \\ \hline \end{array}$$

Um Gleichungssysteme mit dem GTR zu lösen,
wird zunächst die Koeffizientenmatrix eingegeben:

$$\begin{array}{rrr} 5 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & -4 \\ \hline \end{array}$$

Der GTR liefert das Ergebnis in der Form:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem in Diagonalform:

$$\begin{array}{rrcr} x & & = & 1 \\ & y & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

Diese Art der Ausgabe beruht auf einer Schreibweise für lineare Gleichungssysteme, die für manche Bereiche der Mathematik vorteilhaft ist:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{die Lösung lautet dann:} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jedes Gleichungssystem kann durch wiederholtes

a) Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl,
b) Addieren zweier Gleichungen (jeweils rechte und linke Seiten)

auf die Diagonalform gebracht werden.

Löse mit dem GTR:

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & + & 7y & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis: $x = \frac{1}{23}, \quad y = \frac{6}{23}$

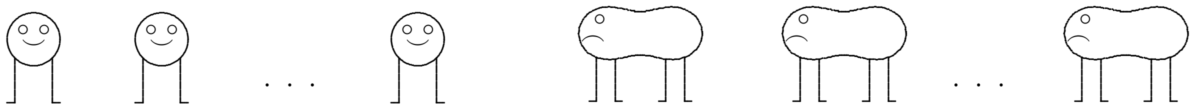
Mit 2nd MATRIX | EDIT werden die Matrix-Koeffizienten eingegeben.
2×3 bedeutet: 2 Zeilen, 3 Spalten.
In die letzte Spalte die rechte Seite des LGS eingeben.
Editor mit 2nd Quit verlassen.
Mit 2nd MATRIX | MATH | B: rref([A]) wird das LGS gelöst.
2nd MATRIX | NAMES 1: liefert z. B. [A],
MATH | 1:Frac versucht Brüche zu erzeugen.

rref reduced row (Zeile) echelon form (Treppen- oder Stufenform)

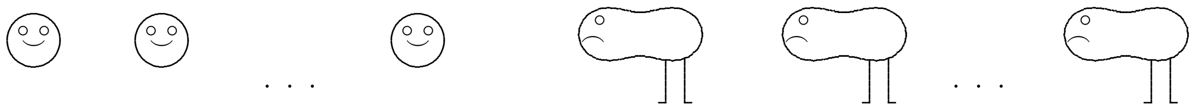
Köpfe-Beine-Aufgabe

Die chinesische Aufgabe kann einfacher gelöst werden, z. B. mit einer innerer Anschauung, die folgendermaßen aussehen könnte (auch große Mathematiker haben in Bildern gedacht):

Gegeben: $Anzahl_{Beine}$, $Anzahl_{Köpfe}$

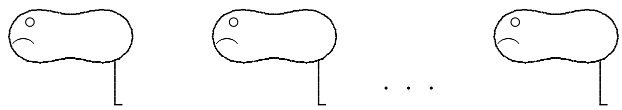


Betrachte: $Anzahl_{Beine} - 2 \cdot Anzahl_{Köpfe}$ *(achte auf die Beine)*



und teile das Ergebnis durch 2:

$$\frac{Anzahl_{Beine} - 2 \cdot Anzahl_{Köpfe}}{2}$$

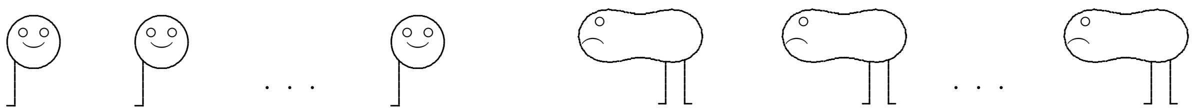


Dies ergibt die Anzahl der Vierbeiner.

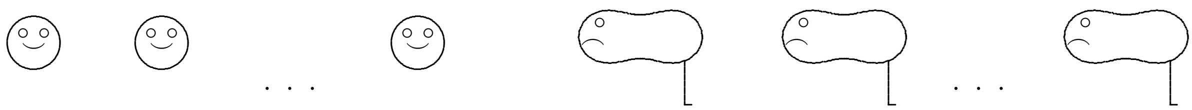
Eine Umformung liefert eine weitere Möglichkeit:

$$\frac{Anzahl_{Beine} - 2 \cdot Anzahl_{Köpfe}}{2} = \frac{Anzahl_{Beine}}{2} - Anzahl_{Köpfe}$$

Betrachte: $\dfrac{Anzahl_{Beine}}{2}$



und vermindere das Ergebnis um $Anzahl_{Köpfe}$:



Gleichungssysteme mit Parametern

1.
$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ (1-a)x & - & ay & = & 2 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & 2a \\ x & + & \frac{1}{b}y & = & 1 \end{array}$$

Ergebnisse

1.
$$\begin{array}{rcr} x & = & 2+a \\ y & = & -1-a \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{ab}{a-b} \;=\; \dfrac{ab}{b-a}, \qquad a \neq b \\ y & = & \dfrac{2a-b}{a-b} \end{array}$$