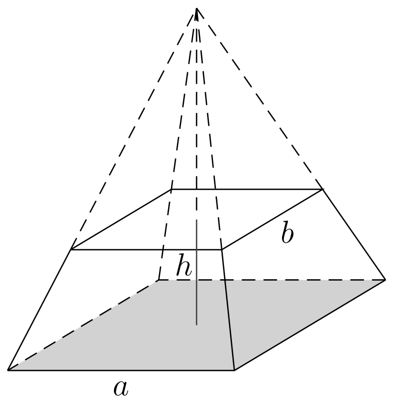
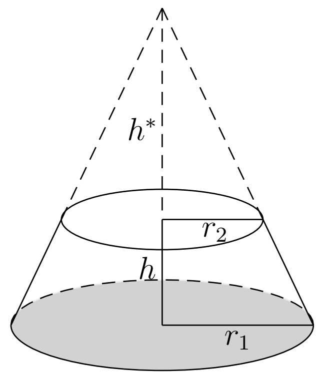
Pyramiden- und Kegelstumpf





Für das Volumen von Stümpfen gilt allgemein:

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{1}{3}h\,(G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)$$

Für einen Kegelstumpf bedeutet dies:

$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

Beim Beweis ist zu beachten, dass für den Pyramidenstumpf $h^* = \dfrac{hb}{a-b}$ ist, für den Kegelstumpf gilt: $h^* = \dfrac{hr_2}{r_1 - r_2}$.
Bei einer Umformung wird die 3. binomische Formel angewendet.

1. Ein Korken hat die Form eines Kegelstumpfs mit $r_1 = 18\,mm$, $r_2 = 12\,mm$, $h = 32\,mm$.
   Welche Masse haben 1000 Stück? (Dichte von Kork $\varrho = 0{,}24\,g/cm^3$)

2. Ein quadratischer Pyramidenstumpf hat die Höhe $h = 3\,cm$. Die große Grundkante ist dreimal so lang wie die kleine. Die Seitenflächen sind um $45°$ gegen die Grundfläche geneigt.
   Bestimme die Länge der Grund- und Seitenkanten, sowie das Volumen und die Mantelfläche.

3. Für einen Kegelstumpf gilt: $V = 11\,m^3$, $r_1 = 2\,m$, $r_2 = 1\,m$.
   Wie groß ist der Böschungswinkel α, den eine Mantellinie mit der Grundfläche einschließt?

4. Ein Kegelstumpf ist $7cm$ hoch, das Volumen beträgt $V = 2441{,}017cm^3$ und der Grundkreisradius ist $r_1 = 12\,cm$. Wie groß ist der Deckkreisradius r_2?

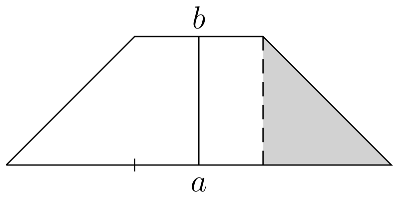
5. Von einem Kegel sind gegeben: $V = 2{,}5\,dm^3$, $h = 2\,dm$.
   Berechne die Länge einer Mantellinie s.

6. Ein Kelchglas hat einen Inhalt von $0{,}5\,l$, der Öffnungswinkel beträgt $60°$. Die Eichmarke ist $1\,cm$ vom oberen Rand entfernt. Wie hoch ist das Glas?

Pyramiden- und Kegelstumpf   Ergebnisse

1. Ein Korken hat die Form eines Kegelstumpfs mit $r_1 = 18\,mm$, $r_2 = 12\,mm$, $h = 32\,mm$.
   Welche Masse haben 1000 Stück? (Dichte von Kork $\varrho = 0{,}24\,g/cm^3$) $m = 5{,}50\,kg$

2. Ein quadratischer Pyramidenstumpf hat die Höhe $h = 3\,cm$. Die große Grundkante ist dreimal so lang wie die kleine. Die Seitenflächen sind um 45° gegen die Grundfläche geneigt.
   Bestimme die Länge der Grund- und Seitenkanten, sowie das Volumen und die Mantelfläche.



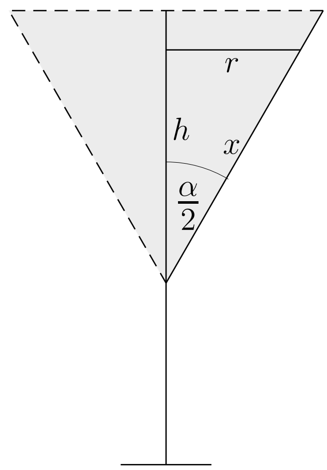
$a = 9\,cm$
$b = 3\,cm$
$s = \sqrt{27}\,cm$
$s = 5{,}20\,cm$
$V = 117\,cm^3$
$M = 101{,}82\,cm^2$

3. Für einen Kegelstumpf gilt: $V = 11\,m^3$, $r_1 = 2\,m$, $r_2 = 1\,m$.
   Wie groß ist der Böschungswinkel α, den eine Mantellinie mit der Grundfläche einschließt?
   $h = 1{,}5\,m$
   $\alpha = 56{,}3°$

4. Ein Kegelstumpf ist $7cm$ hoch, das Volumen beträgt $V = 2441{,}017cm^3$ und der Grundkreisradius ist $r_1 = 12\,cm$. Wie groß ist der Deckkreisradius r_2? $r_2 = 9\,cm$

5. Von einem Kegel sind gegeben: $V = 2{,}5\,dm^3$, $h = 2\,dm$.
   Berechne die Länge einer Mantellinie s.
   $r = 1{,}09\,dm$
   $s = 2{,}28\,dm$

6. Ein Kelchglas hat einen Inhalt von $0{,}5\,l$, der Öffnungswinkel beträgt 60°. Die Eichmarke ist $1\,cm$ vom oberen Rand entfernt. Wie hoch ist das Glas?



$r = x \cdot \sin 30°$

$h = x \cdot \cos 30°$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

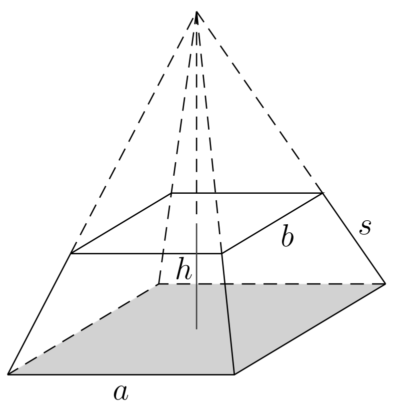
$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

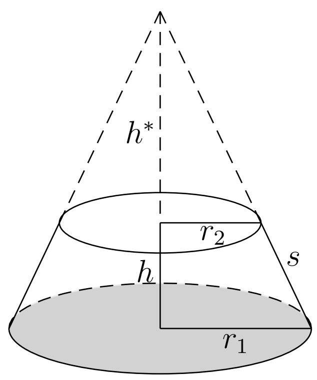
$V = \frac{1}{24}\,\pi\,x^3 \cdot \sqrt{3}$

$h_{\text{Kelch}} = (x + 0{,}1) \cdot \cos 30°$

$h_{\text{Kelch}} = 1{,}21\,dm$

Pyramiden- und Kegelstumpf   Übungsaufgaben





1. Von einem quadratischen Pyramidenstumpf sind gegeben (in cm): $a = 8$, $b = 6$, $h = 5$, gesucht sind:
   a) Höhe der Ergänzungspyramide,
   b) Inhalt der Trapezseitenfläche,
   c) Volumen des Pyramidenstumpfs,
   d) Länge der Seitenkante s.

2. Variation der 1. Aufgabe
   Gegeben sind: $a = 8$, $b = 4$, $h = 6$.

3. Von einem Kegelstumpf sind gegeben (in cm): $r_1 = 8$, $r_2 = 6$, $h = 5$, gesucht sind:
   a) Höhe des Ergänzungskegels,
   b) Volumen des Kegelstumpfs,
   c) Länge der Mantellinie s,
   d) Inhalt der Mantelfläche des Kegelstumpfs.

4. Variation der 3. Aufgabe
   Gegeben sind: $r_1 = 9$, $r_2 = 5$, $h = 4$.

Pyramiden- und Kegelstumpf Lösungen

1. a) $h^* = 15$

   b) $A_{\text{Trapez}} = 7\sqrt{26}$

   c) $V_{\text{Pyramidenstumpf}} = \frac{740}{3}$

   d) $s = 3\sqrt{3}$

2. a) $h^* = 6$

   b) $A_{\text{Trapez}} = 12\sqrt{10}$

   c) $V_{\text{Pyramidenstumpf}} = 224$

   d) $s = 2\sqrt{11}$

3. a) $h^* = 15$

   b) $V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{740}{3}\pi$

   c) $s = \sqrt{29}$

   d) $A_{\text{Mantel}} = 14\pi\sqrt{29}$

4. a) $h^* = 5$

   b) $V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{604}{3}\pi$

   c) $s = 4\sqrt{2}$

   d) $A_{\text{Mantel}} = 56\pi\sqrt{2}$

Kelchglas Übungsaufgaben

1. Ein Kelchglas mit der Höhe $h = 20\ cm$ (ohne Stiel) und dem Öffnungswinkel (Winkel, den zwei gegenüberliegende Mantellinien einschließen) $\alpha = 90°$ wird gefüllt:

   a) mit 100 cm^3,
   b) zu einem Drittel.

   Berechne die Füllhöhe.

2. Ein Kelchglas mit der Höhe $h = 8\ cm$ (ohne Stiel) und dem Öffnungskreisradius $r = 4\ cm$ wird gefüllt:

   a) mit 100 cm^3,
   b) zur Hälfte.

   Berechne die Füllhöhe.

Lösungen

1. a) $h^* = 4{,}57\ cm$
   b) $h^* = 13{,}87\ cm$

2. a) $h^* = 7{,}25\ cm$
   b) $h^* = 6{,}35\ cm$