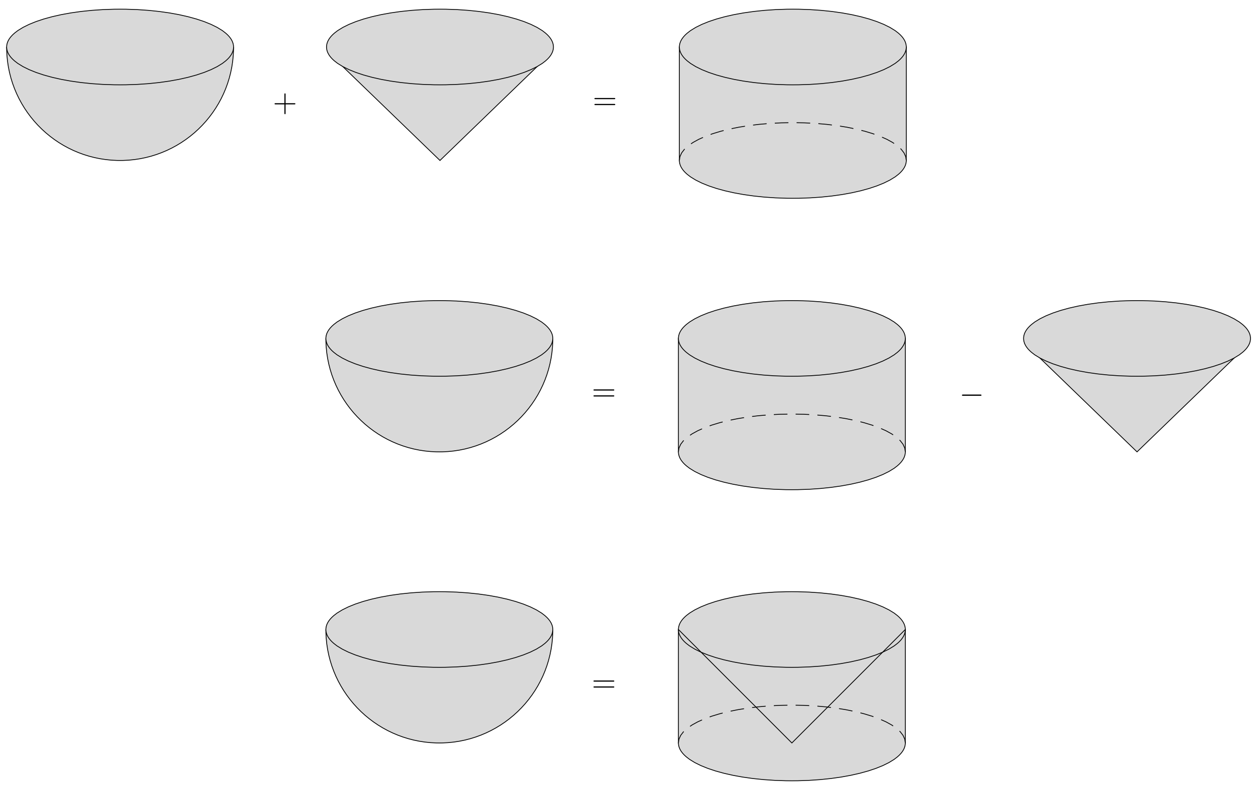
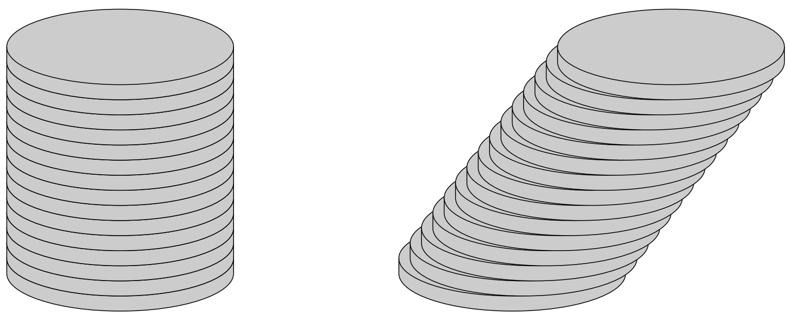
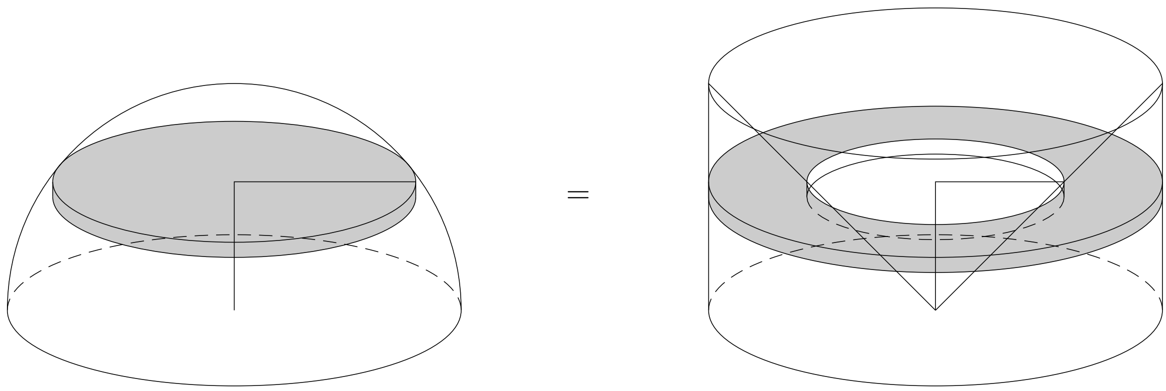
Volumen einer Kugel



Um zu zeigen, dass die Halbkugel gleiches Volumen wie der Archimedische Restkörper hat, betrachten wir gleichdünne Scheiben, die in dergleichen Höhe aus den Körpern ausgeschnitten werden. Eine ähnliche Überlegung belegt, dass das Volumen bei Scherung eines Körpers erhalten bleibt.



Volumen einer Kugel



Halbkugel, Kegel und Zylinder haben gleiche Höhe,
die Höhe ist gleich dem Radius r des Grundkreises.

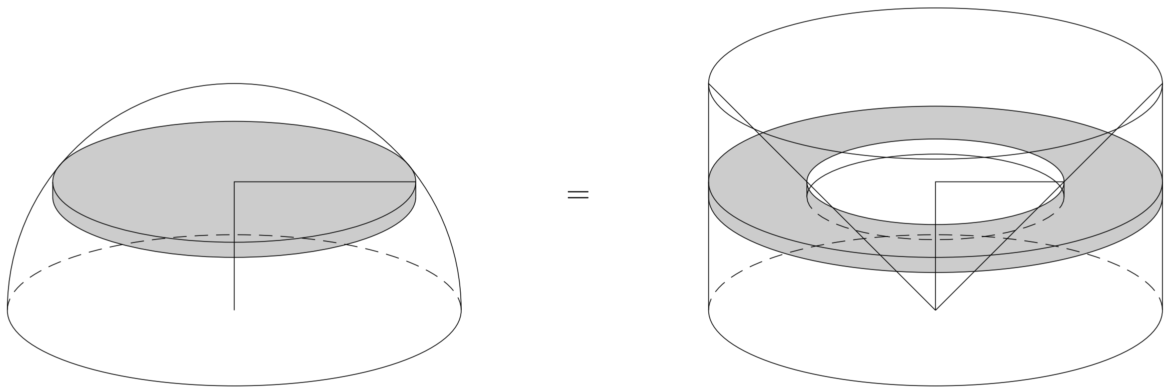
a) Begründe, dass der innere Radius des Ringes mit der Höhe h der oberen Schnittfläche übereinstimmt.

b) Berechne für $h = 1\,cm$, $r = 2\,cm$ die Scheiben und die Ringfläche.

c) Zeige allgemein, dass Scheiben- und Ringfläche übereinstimmen.

d) Leite die Formel für das Kugelvolumen her.

Volumen einer Kugel



Halbkugel, Kegel und Zylinder haben gleiche Höhe,
die Höhe ist gleich dem Radius r des Grundkreises.

a) Begründe, dass der innere Radius des Ringes mit der Höhe h der oberen Schnittfläche übereinstimmt.

b) Berechne für $h = 1\,cm$, $r = 2\,cm$ die Scheiben und die Ringfläche.

c) Zeige allgemein, dass Scheiben- und Ringfläche übereinstimmen.

d) Leite die Formel für das Kugelvolumen her.

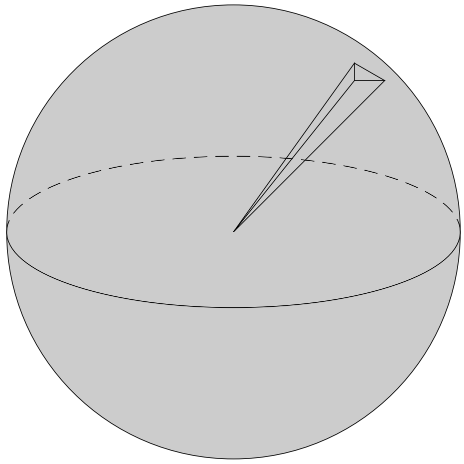
a) Hinweis: Betrachte ein gleichschenkliges Dreieck.

b) $A = 9{,}42\,cm^2$

c) $A = \pi(r^2 - h^2)$

d)
$$\begin{aligned} V_{\text{Halbkugel}} &= V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} \\ &= \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r \\ V_{\text{Kugel}} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Oberfläche einer Kugel



Die Kugel wird durch Pyramiden angenähert,
deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel liegen.

Erläutere:

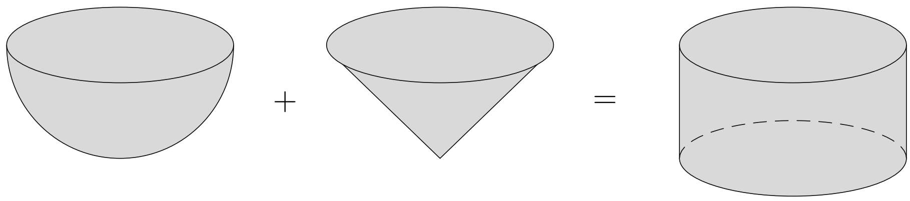
$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} &\approx V_{\text{1. Pyramide}} + V_{\text{2. Pyramide}} + ... \\ &\approx \frac{1}{3} G_1 \cdot r + \frac{1}{3} G_2 \cdot r + ... \\ &\approx \frac{1}{3}\ r \cdot (G_1 + G_2 + ...\ ) \\ V_{\text{Kugel}} &= \frac{1}{3} r \cdot O_{\text{Kugel}} \\ O_{\text{Kugel}} &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

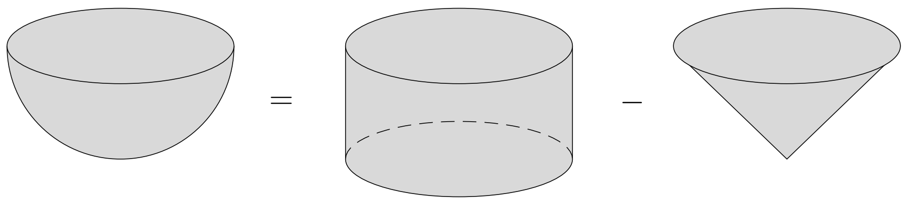
Aufg.
Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel (eines Würfels) mit dem Volumen 1 cm^3?

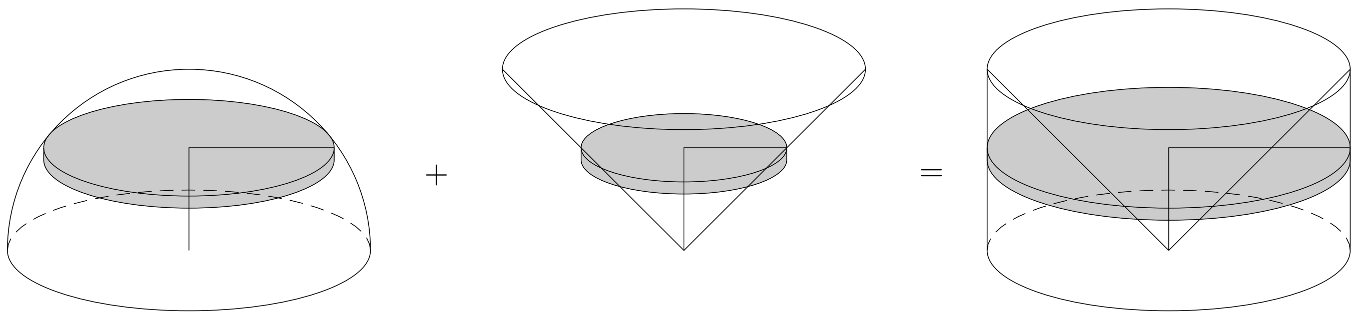
Lösung:
O = 4,84 cm^2 (6 cm^2)

Volumen einer Kugel

ohne Archimedischen Restkörper







Halbkugel, Kegel und Zylinder haben gleiche Höhe.
Die Höhe ist gleich dem Radius r des Grundkreises.

a) Stelle eine begründete Vermutung über die Beziehungen der Volumen und Schnittflächen auf.

b) Berechne für $h = 1\,cm$, $r = 2\,cm$ die Schnittflächen.

c) Beweise deine Schnittflächen-Vermutung.

d) Leite die Formel $V_{\text{Kugel}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ her.

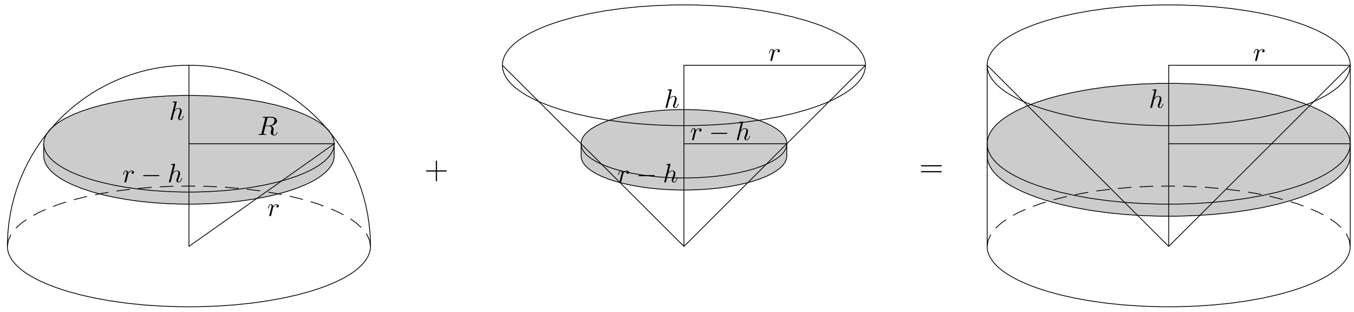
Aufgaben

1. Wie viele Bleikugeln ($d = 3\,mm$) muss man zusammenschmelzen, um eine Kugel mit einem Durchmesser $D = 3\,cm$ zu erhalten? (ohne Taschenrechner)
2. Wie hoch muss ein Zylinder sein, der das gleiche Volumen und den gleichen Durchmesser d wie eine Kugel haben soll?

1. Wie viele Bleikugeln ($d = 3\,mm$) muss man zusammenschmelzen, um eine Kugel mit einem Durchmesser $D = 3\,cm$ zu erhalten? (ohne Taschenrechner)
2. Wie hoch muss ein Zylinder sein, der das gleiche Volumen und den gleichen Durchmesser d wie eine Kugel haben soll?

1. 1000 Stück
2. $h = \frac{2}{3}d$

Volumen eines Kugelsegments



Das Kugelsegment ist durch R und h gegeben.
Um sein Volumen zu ermitteln, muss die Idee zur Bestimmung des Kugelvolumens nur ein wenig angepasst werden. Nun werden ein Zylinder mit der Höhe h und ein Kegelstumpf betrachtet.

Ergänze die Zwischenschritte.

$$
\begin{aligned}
(r-h)^2 + R^2 &= r^2 \\
\Longrightarrow \qquad r &= \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Kugelsegment}} &= V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegelstumpf}} \\
&= \pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi h \cdot \left(r^2 + (r-h)\cdot r + (r-h)^2\right) \\
&= \dots \\
&= \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h) \\
&= \dots \\
&= \frac{\pi}{6} h (3R^2 + h^2)
\end{aligned}
$$