

# Exponentialfunktionen

1. Eine Lotusblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von  $0,3 \text{ m}^2$ . Die bedeckte Teichfläche verdoppelt sich von Monat zu Monat. Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) beträgt die bedeckte Teichfläche  $8 \text{ m}^2$ ?

*Kann das Wachstum durch eine Funktion der Art  $y = k \cdot a^x$  beschrieben werden ( $k$  positiv,  $a > 1$ ), so spricht man von einem exponentiellen Wachstum.*

2. Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur verdoppelt sich alle 4 Stunden. Zu Beginn der Beobachtung seien 300 Bakterien vorhanden.
  - a) Erläutere, dass das Wachstum der Bakterienkultur durch  $y = 300 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$  beschrieben wird.
  - b) Wie viele Bakterien beinhaltet die Kultur 10 Stunden nach Beginn (vor Beginn) der Beobachtung?
  - c) Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) sind 10000 Bakterien vorhanden?
3. Die Temperatur eines  $285^\circ\text{C}$  heißen Körpers halbiert sich stündlich.
  - a) Stelle eine Funktion auf, die den Abkühlungsvorgang beschreibt.
  - b) Stelle den Abkühlungsvorgang grafisch dar.
  - c) Welche Temperatur hat der Körper 5 Stunden nach Beginn des Abkühlungsvorganges?
  - d) Nach welcher Zeit beträgt die Temperatur des Körpers  $1^\circ\text{C}$ ?

*Kann die Abnahme einer Größe durch eine Funktion der Art  $y = k \cdot a^x$  beschrieben werden ( $k$  positiv,  $0 < a < 1$ ), so spricht man von einer exponentiellen Abnahme.*

4. Auf dem Graphen der Funktion  $y = k \cdot a^x$  liegen die Punkte  $A(6 \mid 874,8)$  und  $B(10 \mid 70858,8)$ . Bestimme die Konstanten  $a$  und  $k$ .

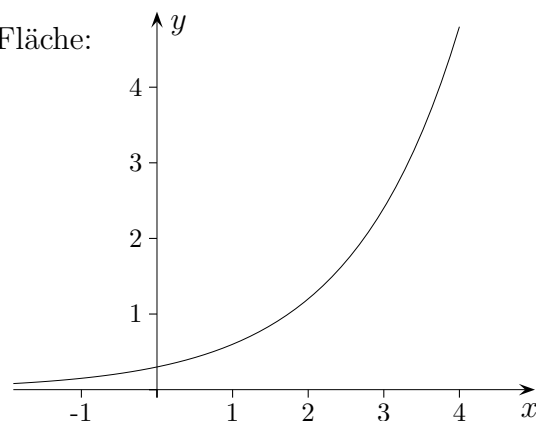
# Exponentialfunktionen

1. Eine Lotusblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von  $0,3 \text{ m}^2$ . Die bedeckte Teichfläche verdoppelt sich von Monat zu Monat. Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) beträgt die bedeckte Teichfläche  $8 \text{ m}^2$ ?

Wir ermitteln den Zusammenhang von der verstrichenen Zeit und der Größe der bedeckten Fläche:

Zeit $x$	bedeckte Fläche $y$ (in $\text{m}^2$ )
0	$0,3$
1	$0,3 \cdot 2$
2	$0,3 \cdot 2^2$
3	$0,3 \cdot 2^3$

Also gilt:  $y = 0,3 \cdot 2^x$



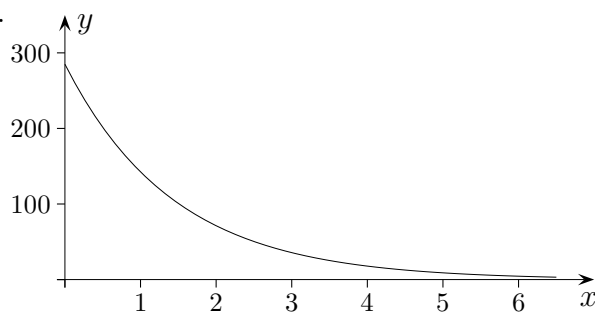
$x = -1$  bedeutet einen Monat vor dem Beobachtungsbeginn.

$$\begin{aligned} 0,3 \cdot 2^x &= 8 \\ x &= 4,74 \end{aligned}$$

2. Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur verdoppelt sich alle 4 Stunden. Zu Beginn der Beobachtung seien 300 Bakterien vorhanden.
  - a) Erläutere, dass das Wachstum der Bakterienkultur durch  $y = 300 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$  beschrieben wird.
  - b) Wie viele Bakterien beinhaltet die Kultur 10 Stunden nach Beginn (vor Beginn) der Beobachtung? 1697 (53)
  - c) Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) sind 10000 Bakterien vorhanden? 20,24

3. Die Temperatur eines  $285^\circ\text{C}$  heißen Körpers halbiert sich stündlich.

- a) Stelle eine Funktion auf, die den Abkühlungsvorgang beschreibt.  $y = 285 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- b) Stelle den Abkühlungsvorgang grafisch dar.



- c) Welche Temperatur hat der Körper 5 Stunden nach Beginn des Abkühlungsvorganges?
- d) Nach welcher Zeit beträgt die Temperatur des Körpers  $1^\circ\text{C}$ ? 8,2       $8,9^\circ\text{C}$

---

Roofls

# Exponentialfunktionen

4. Auf dem Graphen der Funktion  $y = k \cdot a^x$  liegen die Punkte  $A(6 \mid 874,8)$  und  $B(10 \mid 70858,8)$ .

Bestimme die Konstanten  $a$  und  $k$ .

$$70858,8 = k \cdot a^{10}$$

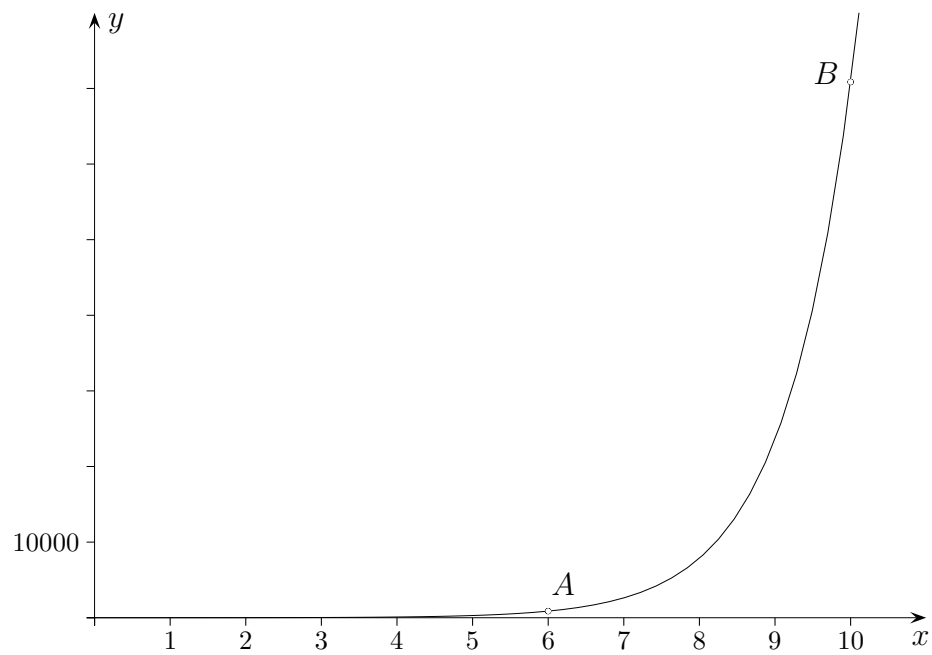
$$874,8 = k \cdot a^6$$

$$\frac{70858,8}{874,8} = a^4$$

$$81 = a^4$$

$$a = 3$$

$$k = 1,2$$

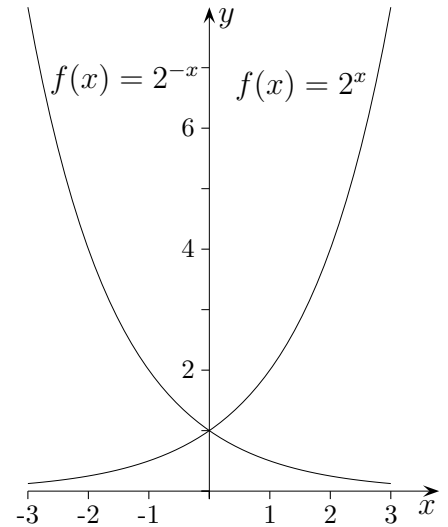


# Graphen der Exponentialfunktionen (ohne GTR)

1. a) Zeichne die Graphen von  $f(x) = 2^x$  und  $f(x) = 2^{-x}$  .  
b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Funktionen?
  
2. Skizziere den Graph und erläutere den Verlauf.
  - a)  $f(x) = 2^x + 1$
  - b)  $f(x) = -2^x$
  - c)  $f(x) = -2^{-x}$
  - d)  $f(x) = 3 - 2^{-x}$

# Graphen der Exponentialfunktionen (ohne GTR)

1. a) Zeichne die Graphen von  $f(x) = 2^x$  und  $f(x) = 2^{-x}$ .  
 b) Welche Beziehungen bestehen zwischen den Funktionen?



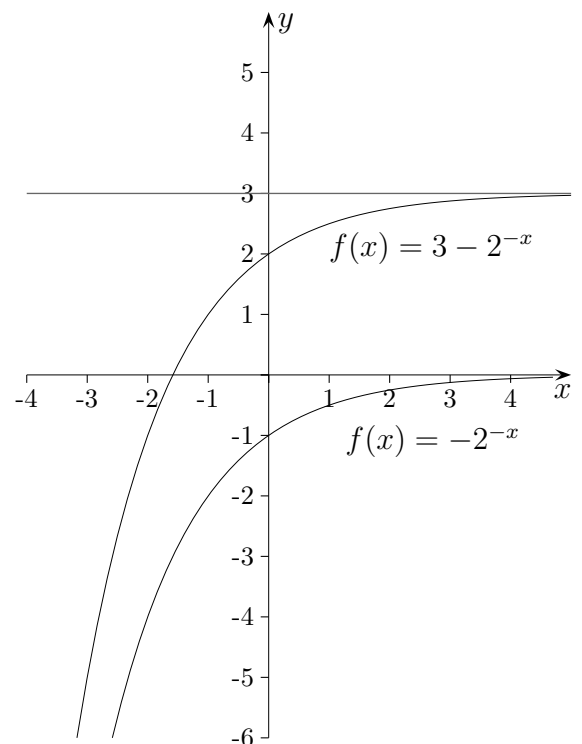
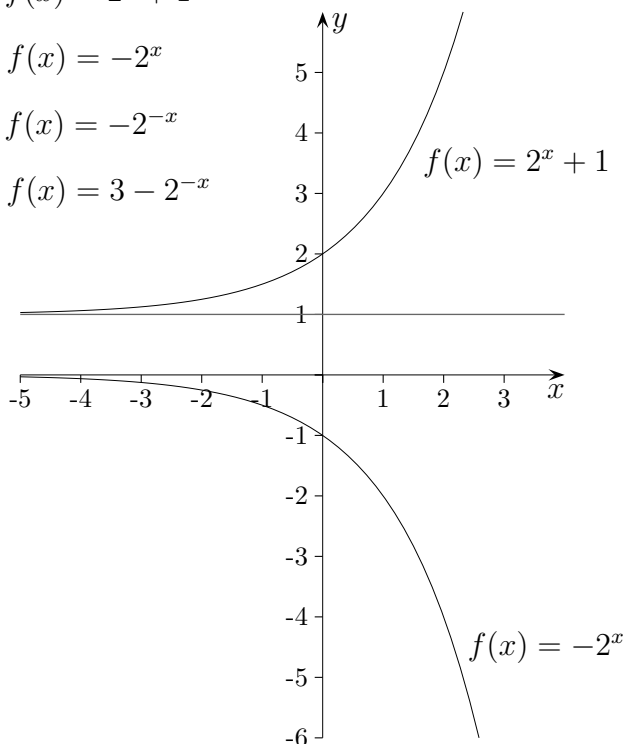
a)

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2^x$	$2^{-3}$	$2^{-2}$	$2^{-1}$	1	$2^1$	$2^2$	$2^3$
$2^{-x}$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	1	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$

- b) Die Graphen gehen durch Spiegelung an der  $y$ -Achse auseinander hervor.  
 Der Graph von  $f(x) = 2^x$  stellt ein exponentielles Wachstum dar,  
 der Graph von  $f(x) = 2^{-x}$  wegen  $2^{-x} = (2^{-1})^x = (\frac{1}{2})^x$  einen exponentiellen Zerfall.

2. Skizziere den Graph und erläutere den Verlauf.

- a)  $f(x) = 2^x + 1$   
 b)  $f(x) = -2^x$   
 c)  $f(x) = -2^{-x}$   
 d)  $f(x) = 3 - 2^{-x}$



Die Spiegelung des Graphen von  $f(x) = 2^x$  an der  $x$ -Achse ergibt den Graphen von  $f(x) = -2^x$ .  
 $f(x) = 3 - 2^{-x}$  ist die Funktion eines beschränkten Wachstums mit der Grenze  $G = 3$ .

## Exponentielles Wachstum, exponentielle Abnahme (exponentieller Zerfall)

1. Wie lautet die Zinseszinsformel?

Welche Funktion  $f(x) = \dots$  (Zeit  $x$ ) erfasst die Veränderung eines Bestands (Anfangsbestand stets  $a$ ) für

2. eine Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit,
3. eine Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten,
4. eine Halbierung pro Zeiteinheit,
5. eine Halbierung in jeweils 3 Zeiteinheiten (Halbwertszeit beträgt 3 Zeiteinheiten),
6. einen 15%-igen Zuwachs pro Zeiteinheit,
7. eine 15%-ige Abnahme pro Zeiteinheit (einen 15%-igen Zerfall),
8. einen 15%-igen Zuwachs in jeweils 3 Zeiteinheiten,
9. einen Zuwachs um ein Drittel des jeweiligen Bestands pro Zeiteinheit,
10. eine Abnahme um ein Zwölftel des jeweiligen Bestands pro Zeiteinheit?

## Exponentielles Wachstum, exponentielle Abnahme (exponentieller Zerfall)

- |  |   |
|--|---|
| 1. $K_n = K_0 \cdot q^n$                                   | Zinseszinsformel, $q = 1 + \frac{p}{100}$   |
| 2. $f(x) = a \cdot 2^x$                                    | Verdopplung des Bestands pro Zeiteinheit, Anfangsbestand $a$                                |
| 3. $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$                        | Verdopplung in jeweils 3 Zeiteinheiten,<br>Verdopplungszeit beträgt 3 Zeiteinheiten         |
| 4. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$             | Halbierung des Bestands pro Zeiteinheit   |
| 5. $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$ | Halbierung in jeweils 3 Zeiteinheiten,<br>Halbwertszeit beträgt 3 Zeiteinheiten             |
| 6. $f(x) = a \cdot 1,15^x$                                 | $1 + \frac{15}{100} = 1,15$ , 15%-iger Zuwachs pro Zeiteinheit                              |
| 7. $f(x) = a \cdot 0,85^x$                                 | $1 - \frac{15}{100} = 0,85$ , 15%-ige Abnahme pro Zeiteinheit, 15%-iger Zerfall             |
| 8. $f(x) = a \cdot 1,15^{\frac{x}{3}}$                     | 15%-iger Zuwachs in jeweils 3 Zeiteinheiten   |
| 9. $f(x) = a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x$             | $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ , Zunahme um $\frac{1}{3}$ des Bestands pro Zeiteinheit     |
| 10. $f(x) = a \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^x$          | $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ , Abnahme um $\frac{1}{12}$ des Bestands pro Zeiteinheit |

Um z.B. für  $f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}}$  oder  $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$

die jährliche Zuwachs- bzw. Abnahmerate (Zeit  $x$  in Jahren) zu ermitteln,  
ist die Funktion auf die Form  $f(x) = a \cdot b^x$  zu bringen.

$$f(x) = a \cdot 2^{\frac{x}{3}} = a \cdot \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^x = a \cdot 1,260^x \quad \text{jährliche Zunahme um 26,0\%}$$

$$f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}} = a \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^x = a \cdot 0,794^x \quad \text{jährliche Abnahme um 20,6\%}$$

Etwas einfacher kann der Bestand nach einem Jahr ermittelt werden und dann der prozentuale Zuwachs bezüglich des Anfangsbestandes.