Bernoulli-Kette Einführung

Die Anzahl der 0/1-Folgen der Länge n mit k Einsen sollte bekannt sein.

Wir haben 10 Äpfel in einer Reihe vor uns liegen.
Jeder Apfel ist mit 40 %-iger Wahrscheinlichkeit wurmstichig ($\hat{=}$ 1).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (in Prozent), dass

a) alle Äpfel,

b) kein Apfel,

c) die ersten 3 Äpfel (an die Restlichen werden keine Bedingungen geknüpft),

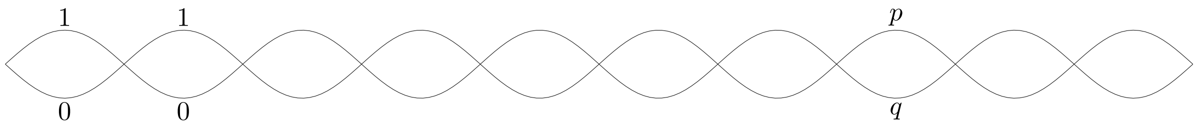
d) nur (genau) die ersten 3 Äpfel,

e) 3 Äpfel

wurmstichig sind/ist?

f) Verallgemeinere das letzte Ergebnis.

g) Veranschauliche die Ereignisse in dem Diagramm.



h) Die Lieferkonditionen basieren auf dem (maximalen) Anteil von 40 % wurmstichiger Äpfel. Nun finden wir bei Stichproben unter 10 wiederholt 7 und mehr wurmstichige Äpfel. Gib begründete Empfehlungen, wie wir uns unserem Lieferanten gegenüber verhalten sollten.

i) Wie groß ist für eine Stichprobe der Länge 10 die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten 5 (genau) 2 und unter den restlichen 5 auch (genau) 2 wurmstichige Äpfel sind?

j) Vergleiche die letzte Wahrscheinlichkeit mit der Wahrscheinlichkeit, unter 10 Äpfeln 4 wurmstichige zu finden.

Die Anzahl der 0/1-Folgen der Länge n mit k Einsen sollte bekannt sein.

Wir haben 10 Äpfel in einer Reihe vor uns liegen.
Jeder Apfel ist mit 40 %-iger Wahrscheinlichkeit wurmstichig ($\hat{=}$ 1).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (in Prozent), dass

a) alle Äpfel, $0{,}4^{10} = 1{,}0\ldots \cdot 10^{-4} = 0{,}0001 = 0{,}0001 \cdot 100\,\% = 0{,}01\,\%$

b) kein Apfel, $0{,}6\,\%$

c) die ersten 3 Äpfel (an die Restlichen werden keine Bedingungen geknüpft), $6{,}4\,\%$

d) nur (genau) die ersten 3 Äpfel, $0{,}2\,\%$

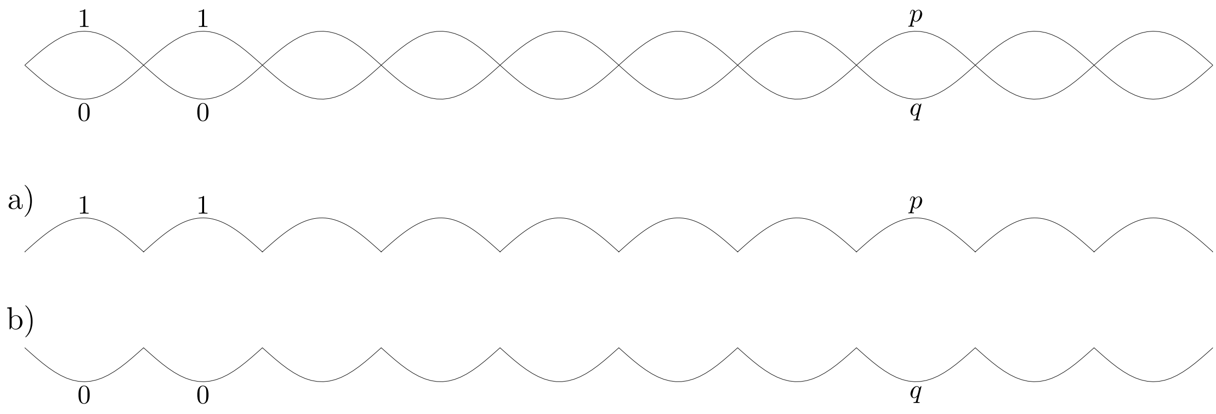
e) 3 Äpfel $P(X = 3) = 21{,}5\,\%$

X ist die (variable) Anzahl der wurmstichigen Äpfel.

wurmstichig sind/ist?

f) Verallgemeinere das letzte Ergebnis. $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \qquad q = 1 - p$

g) Veranschauliche die Ereignisse in dem Diagramm.



h) Die Lieferkonditionen basieren auf dem (maximalen) Anteil von 40 % wurmstichiger Äpfel.
Nun finden wir bei Stichproben unter 10 wiederholt 7 und mehr wurmstichige Äpfel.
Gib begründete Empfehlungen, wie wir uns unserem Lieferanten gegenüber verhalten sollten.

$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 5{,}5\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit ist so gering, dass ein Verdacht auf den Anteil 40 % fällt.
Möglicherweise hat sich der Anteil erhöht.

i) Wie groß ist für eine Stichprobe der Länge 10 die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten 5 (genau) 2 und unter den restlichen 5 auch (genau) 2 wurmstichige Äpfel sind? $11{,}9\,\%$

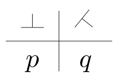
j) Vergleiche die letzte Wahrscheinlichkeit mit der Wahrscheinlichkeit, unter 10 Äpfeln 4 wurmstichige zu finden. $25{,}1\,\%$

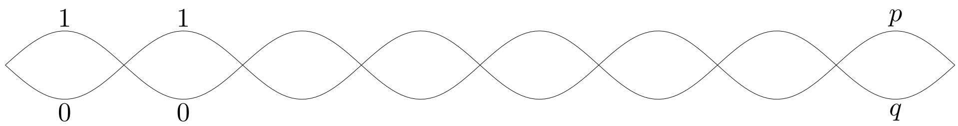
Die Bernoulli-Kette

Jacob Bernoulli (1654 - 1705)

Zufallsexperimente, die nur genau zwei Ergebnisse haben können, heißen Bernoulli-Versuche. Wird ein solches Experiment unter gleichen Bedingungen n-mal wiederholt, so liegt eine Bernoulli-Kette der Länge n vor.
Beispiele: n-maliges Werfen einer Reißzwecke, Folge von Geburten (Junge/Mädchen), Testen von Glühbirnen mit den Einzelergebnissen defekt/nicht defekt.

Zur Unterscheidung wird ein Ausgang des Einzelversuchs mit 1 (Treffer), der andere mit 0 bezeichnet, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mit p (Trefferwahrscheinlichkeit) und q.
Welches Ergebnis als Treffer bezeichnet wird, richtet sich nach der Fragestellung, da man sich bei Bernoulli-Ketten für die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erzielen, interessiert.





Aufg. Versuche p für das Werfen einer Reißzwecke näherungsweise zu ermitteln.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt eine Reißzwecke bei 8-maligem Werfen 3-mal auf den Kopf?

Die Bernoulli-Kette der Länge 8 besteht aus allen 0-1-Folgen (Pfaden) der Länge 8,
z. B. (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1), 1 entspricht $\perp$.

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit aller Pfade mit genau 3 Treffern,

z. B. (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) oder
(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)

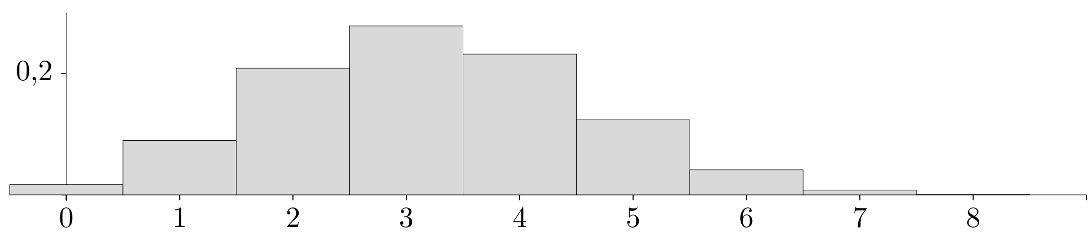
Die Anzahl dieser Pfade beträgt $\binom{8}{3}$, ihre Wahrscheinlichkeit ist stets $p^3 \cdot q^5$.

Sei allgemein bei einer Bernoulli-Kette der Länge n die Trefferwahrscheinlichkeit p.
Dann ist die Wahrscheinlichkeit für k Treffer

$$P(k \text{ Treffer}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}\,, \qquad q = 1 - p$$

Beispiel $n = 8,\ p = 0,4$:

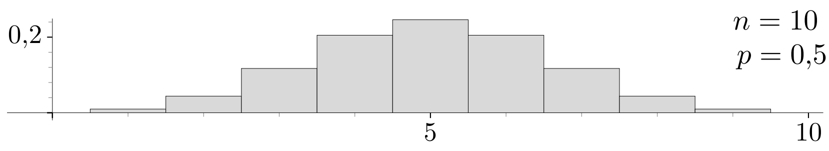
k	$P(k \text{ Treffer}) = \binom{8}{k} \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{n-k}$
0	0,017
1	0,090
2	0,209
3	0,279
4	0,232
5	0,124
6	0,041
7	0,008
8	0,000



histos gr. Gewebe, Netz
gramm gr. Darstellung

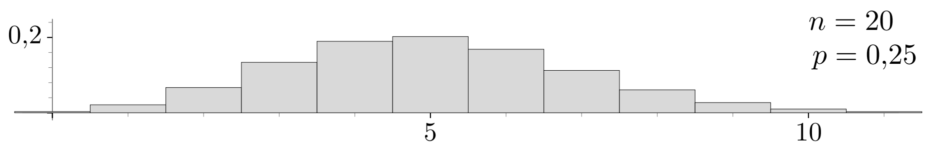
Die Bernoulli-Kette, Aufgaben

1. Eine Münze wird 10-mal geworfen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass viermal (fünfmal) Zahl geworfen wird?



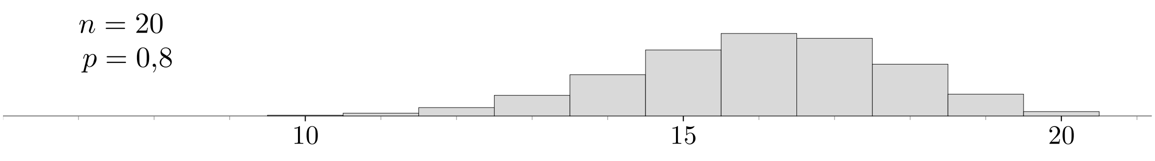
2. Ein Würfel wird 15-mal geworfen.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei (drei) Sechsen zu werfen?

3. In einer Lieferung Äpfel sind 25 % wurmstichig.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 zufällig ausgewählten Äpfeln
   a) genau 5
   b) höchstens 5
   c) mindestens 5 wurmstichige Äpfel sind?



4. Bei der Produktion von Glühbirnen sind 5 % defekt.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 zufällig ausgewählten Glühbirnen
   a) weniger als 5
   b) mehr als 10 defekte Glühbirnen sind?

5. Ein Blumenhändler gibt eine 80 %ige Keimgarantie für seine Blumenzwiebeln.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit keimen tatsächlich
   a) weniger als 14
   b) mindestens 16 von 20 eingesetzten Blumenzwiebeln?



Die Bernoulli-Kette, Lösungen

1. viermal (fünfmal) Zahl 0,205 (0,246)

2. zwei (drei) Sechsen 0,273 (0,236)

3. a) genau 5 0,202
   b) höchstens 5 0,617
   c) mindestens 5 0,585

4. a) weniger als 5 0,436
   b) mehr als 10 0,011

5. a) weniger als 14 0,087
   b) mindestens 16 0,630

Elfmeterschießen

10 Fußballspieler schießen nacheinander auf ein Tor.
Jeder Spieler erzielt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ einen Treffer.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau 8 (5, 10) Treffer?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Treffer im Intervall [6, 9] liegt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 3 Spieler treffen?

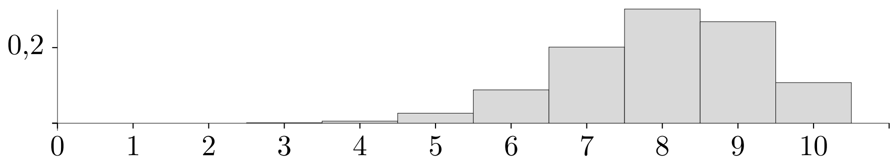
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 2 Spieler treffen und die nächsten 2 nicht?

e) Wie viele Spieler müssen mindestens schießen, damit mit (mindestens) 99,9 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Treffer vorliegt?

Von den 10 Spielern haben genau drei ein Tor geschossen.
Wir unterscheiden ab nun nur zwischen Torschützen und Nicht-Torschützen.

f) Auf wie viele Arten können sich die Spieler in einer Reihe für ein Gruppenfoto aufstellen?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Torschützen bei zufälliger Aufstellung nebeneinander stehen?



Elfmeterschießen Lösungen

10 Fußballspieler schießen nacheinander auf ein Tor.
Jeder Spieler erzielt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ einen Treffer.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau 8 (5, 10) Treffer?

$$P(X = 8) = 30{,}2\,\%$$
$$P(X = 5) = 2{,}6\,\%$$
$$P(X = 10) = 10{,}7\,\%$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Treffer im Intervall [6, 9] liegt?

$$P(6 \leq X \leq 9) = 86{,}0\,\%$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 3 Spieler treffen? $0{,}8^3 = 51{,}2\,\%$

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 2 Spieler treffen und die nächsten 2 nicht?

$$0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 2{,}6\,\%$$

e) Wie viele Spieler müssen mindestens schießen, damit mit (mindestens) 99,9 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Treffer vorliegt?

$$1 - 0{,}2^n = 0{,}999$$
$$n = 4{,}3 \qquad \text{ab } n = 5$$

Von den 10 Spielern haben genau drei ein Tor geschossen.
Wir unterscheiden ab nun nur zwischen Torschützen und Nicht-Torschützen.

f) Auf wie viele Arten können sich die Spieler in einer Reihe für ein Gruppenfoto aufstellen?

$$\binom{10}{3} = 120$$

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Torschützen bei zufälliger Aufstellung nebeneinander stehen?

$$\frac{8}{\binom{10}{3}} = 6{,}7\,\%$$