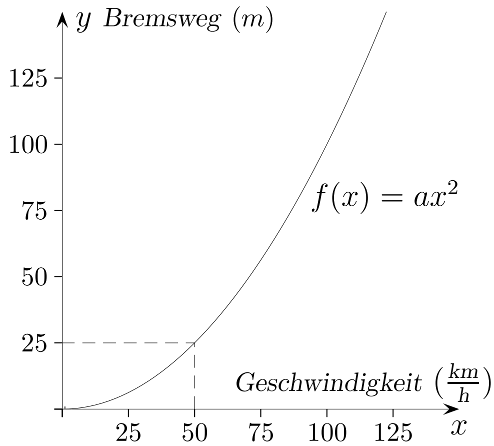
Umkehrfunktion

Der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Bremsweg wird näherungsweise durch eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2$ erfasst, wobei a experimentell ermittelt werden muss.

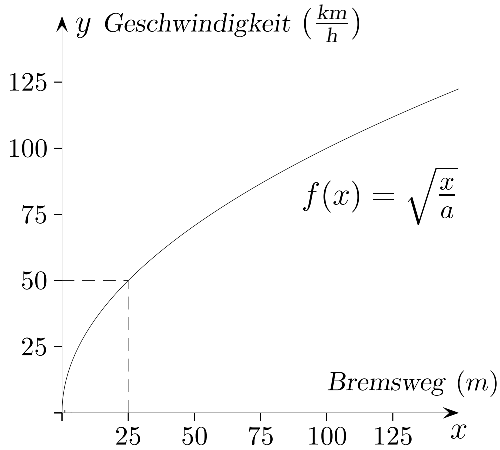


Beispiel: $a = \dfrac{1}{100}$

x	50	100	150
$f(x)$	25	100	225

Für die Rekonstruktion von Unfällen ist von Interesse:
Welche Geschwindigkeit lag bei gegebenem Bremsweg vor?

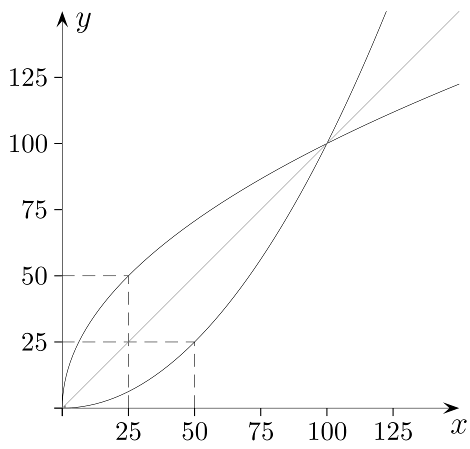
Trägt man den Bremsweg auf der x-Achse ab, so entsteht der Graph der *Umkehrfunktion* f^{-1}.



x	25	100	225
$f^{-1}(x)$	50	100	150

Der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden.
Der Funktionsterm von f^{-1} ergibt sich durch Vertauschen von x und y und anschließendes Auflösen nach y.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2\,, \qquad x \geq 0 \\ y &= ax^2 \\ x &= ay^2 \\ \frac{x}{a} &= y^2 \\ y &= \sqrt{\frac{x}{a}} \end{aligned}$$



Die Umkehrfunktion der e-Funktion ist die ln-Funktion.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ y &= e^x \\ x &= e^y \\ y &= \ln x \end{aligned}$$

Umkehrfunktion

Aufg.

a) Für welche Funktionen f existiert f^{-1}?

b) Zeige, dass gilt: $\quad f(f^{-1}(x)) = x$

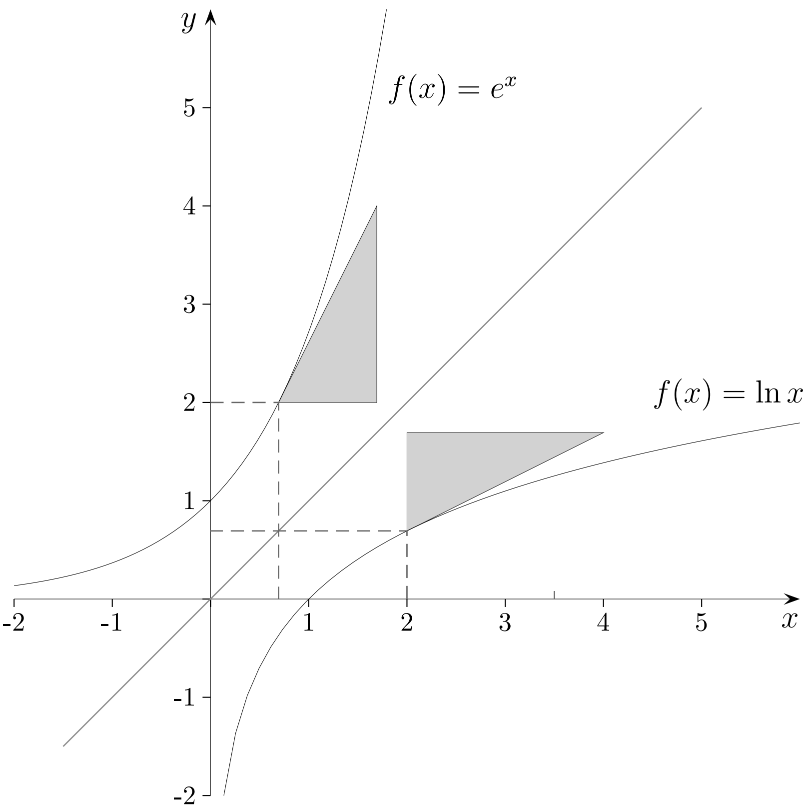
c) Bilde die Umkehrfunktion von $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

d) Stelle eine Vermutung über die Ableitung von f^{-1} auf.

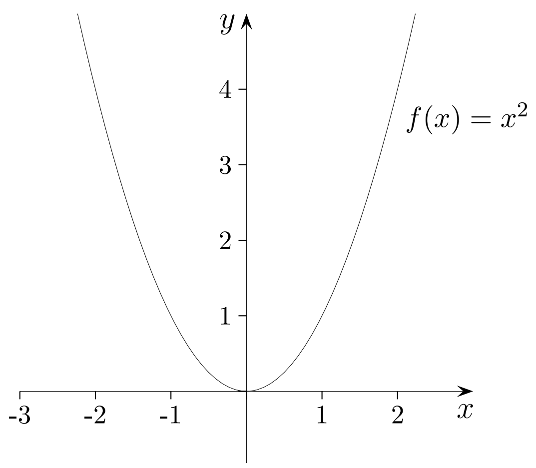
e) Beweise: $\quad (f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

f) Bilde die Ableitung von $f(x) = \ln x$.

g) Bilde die Ableitung von $f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \geq 0, \quad n \in \mathcal{N}$.



Umkehrfunktion   Ergänzung



Zu

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

existiert keine Umkehrfunktion, jedoch zu

$$f(x) = x^2, \quad x \geq 0, \ \text{nämlich} \ f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Der Definitionsbereich muss also so eingeschränkt werden, dass die Funktion umkehrbar wird.
Möglich wäre auch:

$f(x) = x^2, \quad x \leq 0, \quad \text{mit} \ f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$