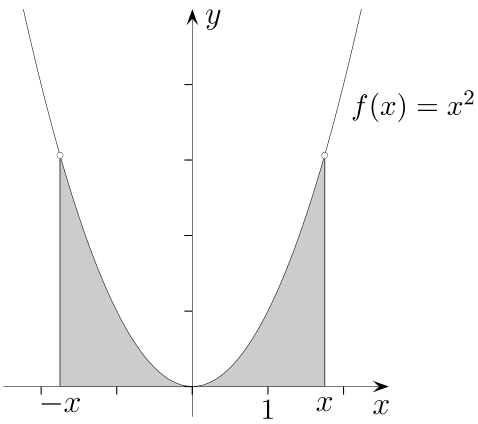
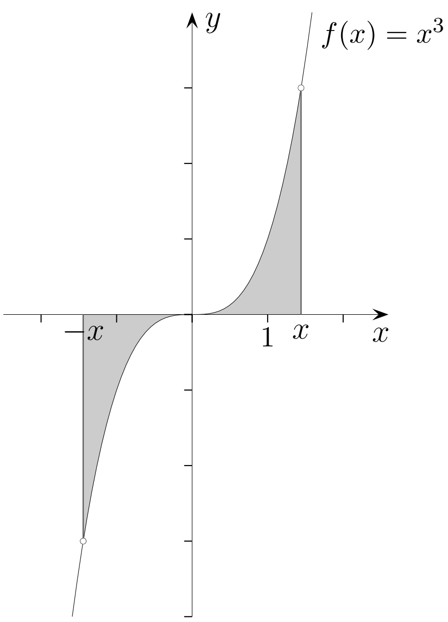
Symmetrie von Graphen



Wir untersuchen Funktionsgraphen auf Symmetrie.

a) Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Für x-Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, ergeben sich dieselben Funktionswerte.

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, falls $f(x) = f(-x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich ist.

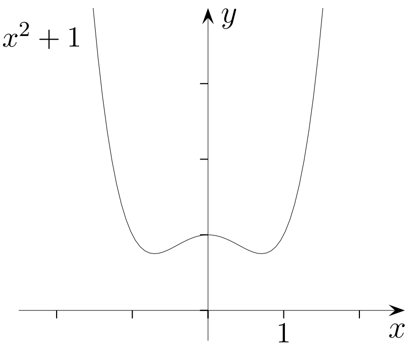


b) Der Graph der Funktion $f(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für x-Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, haben die Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen.

Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich ist.

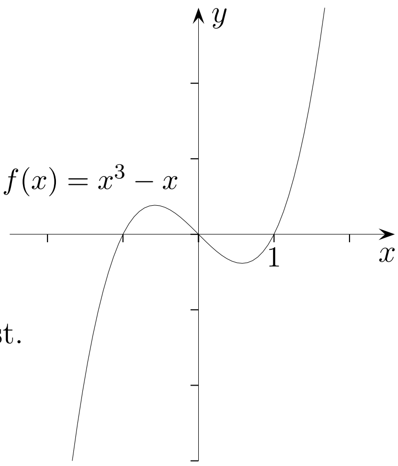
Symmetrie

Die Symmetrie von Polynomen lässt sich leicht erkennen.



Wir betrachten das Beispiel: $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Aufgrund der geraden Exponenten stimmen die Funktionswerte für x und $-x$ überein, der Graph ist daher achsensymmetrisch.



Falls nur ungerade Exponenten vorhanden sind, wie z. B. für $f(x) = x^3 - x$, und der Graph durch den Ursprung verläuft, liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor, wie leicht nachzurechnen ist.

$$\begin{aligned} f(-x) &\stackrel{?}{=} -f(x) \\ (-x)^3 - (-x) &\stackrel{?}{=} -(x^3 - x) \\ -x^3 + x &= -x^3 + x \end{aligned}$$

Der Graph eines Polynoms mit nur geraden Exponenten ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Beispiel: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 5$

Der Graph eines Polynoms mit nur ungeraden Exponenten ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn überdies der konstante Summand Null ist.

Beispiel: $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$

nicht punktsymmetrisch wäre: $f(x) = x^5 - x^3 + 2$

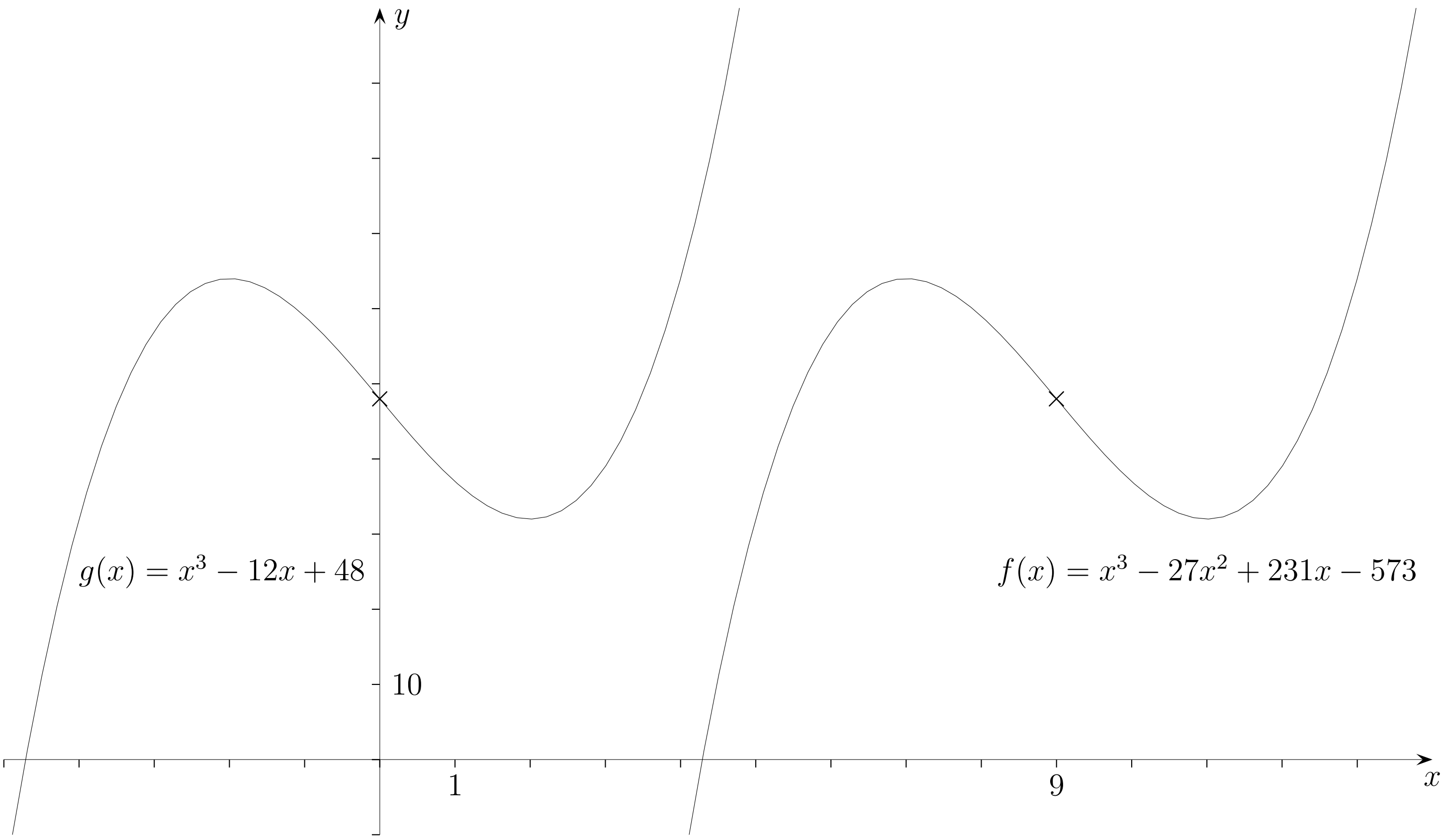
Von diesen Sätzen gelten auch die Umkehrungen, so dass also z.B. der Graph von $f(x) = x^4 + 3x^3$ aufgrund der gemischten Exponenten weder y-achsensymmetrisch, noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Man kann zeigen, dass ein Polynom 3. Grades stets punktsymmetrisch zum Wendepunkt ist.

Punktsymmetrie zum Wendepunkt

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_w = -\dfrac{b}{3}$



$g(x) = f(x + x_w)$

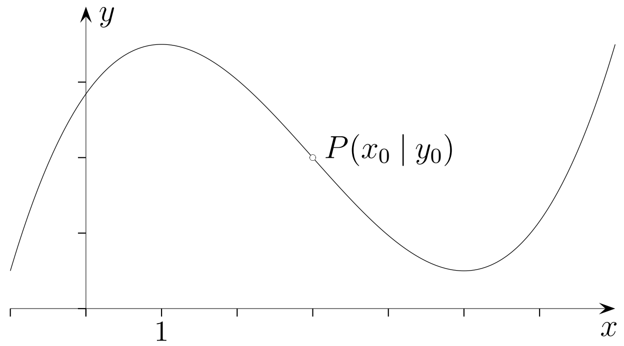
$g(x) = x^3 - (c - \dfrac{b^2}{3})\,x + y_w$

$$y_w = \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d$$

Aufg.
Erläutere die Beweisidee und führe den Nachweis genauer aus.

Roolfs

Punktsymmetrie



Erläutere:
Der Graph von f ist genau dann punktsymmetrisch zu $P(x_0 \mid y_0)$, falls gilt:

$$f(x+x_0) - y_0 = -\big(f(-x+x_0) - y_0\big)$$

$$\iff \quad f(x_0+x) + f(x_0-x) = 2y_0$$

Hinweis:
Für die Punktsymmetrie zum Ursprung kann $f(x) + f(-x) = 0$ unmittelbar gesehen werden.
Ähnlich offensichtlich ist $f(x_0+x) + f(x_0-x) = 2y_0$ für die Punktsymmetrie zu $P(x_0 \mid y_0)$.