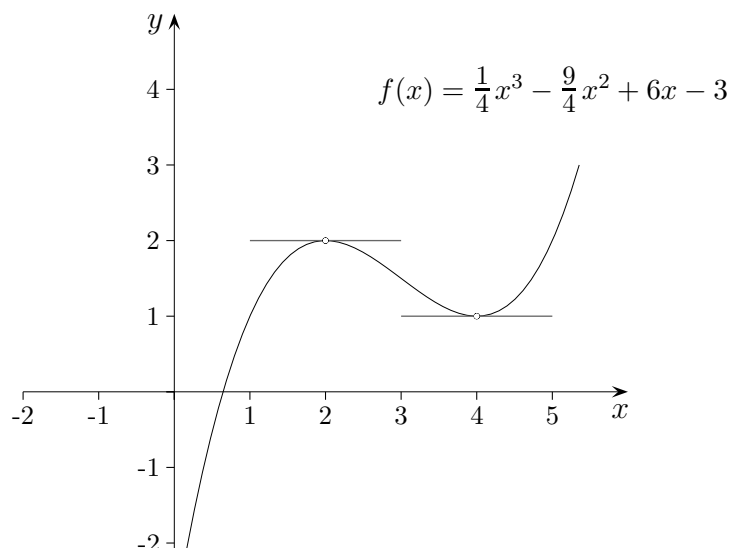


Notwendige und hinreichende Bedingungen

1. Extrema:

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums an der Stelle x_0 ist das Vorliegen einer waagerechten Tangente, d. h. also $f'(x_0) = 0$.

$f'(x_0) = 0$ ist nicht hinreichend für die Existenz eines Extremums, es könnte auch ein Sattelpunkt vorliegen.



notwendig: Was brauche ich?

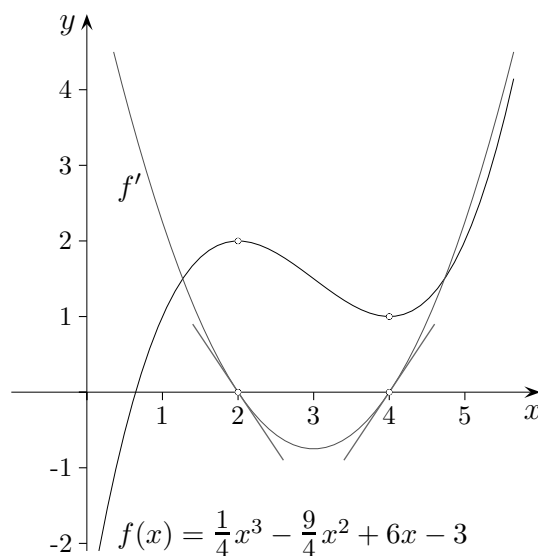
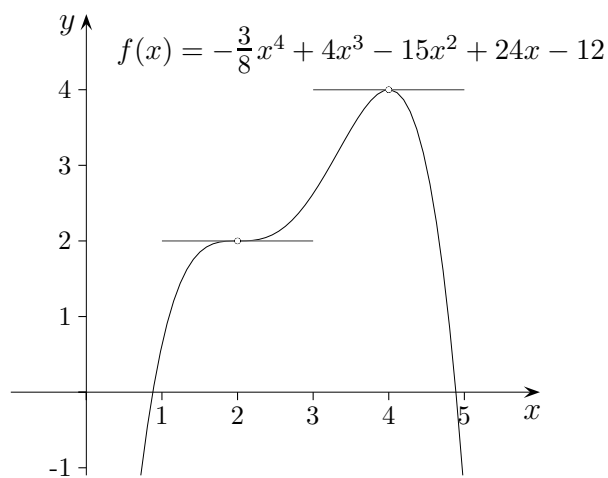
hinreichend: Was reicht aus?

Hinreichend wäre:

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ für ein Maximum und

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ für ein Minimum.

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ bzw. $f''(x_0) < 0$ sind nicht notwendig für die Existenz eines Extremums, siehe das Gegenbeispiel $f(x) = x^4$.



Roofs

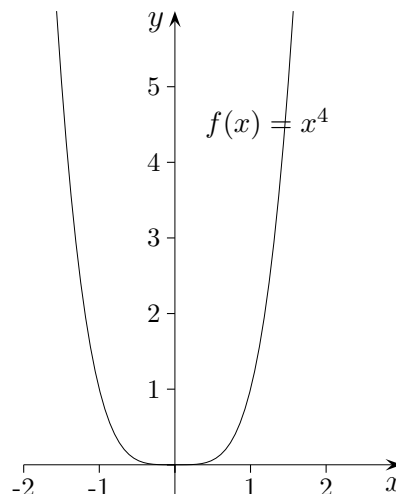
Notwendige und hinreichende Bedingungen

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ ist, können wir nicht entscheiden, ob ein Extremum vorliegt, dies würde sich aus einer Untersuchung noch höherer Ableitungen ergeben, was aber in der Schule unterbleibt. Durch die Untersuchung auf Wendepunkte wird die Situation ohnehin in vielen Fällen geklärt.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^4 \\f'(x) &= 4x^3 \\f''(x) &= 12x^2\end{aligned}$$

$$\text{Min}(0 \mid 0)$$

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\f'(0) &= 0 \\f''(0) &= 0\end{aligned}$$



2. Wendepunkte:

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes an der Stelle x_0 (dem Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve oder umgekehrt) ist das Vorliegen einer waagerechten Tangente an den Graphen von f' an dieser Stelle, d. h. $f''(x_0) = 0$.

Diese Bedingung ist nicht hinreichend, siehe $f(x) = x^4$.

Hinreichend (und notwendig) für die Existenz eines Wendepunktes wäre, dass f' an der Stelle x_0 ein Extremum hat (Begründung?), hinreichend wäre also

$$\begin{aligned}f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) > 0 & \quad (\text{Minimum von } f') \text{ oder} \\f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) < 0 & \quad (\text{Maximum von } f'),\end{aligned}$$

Die hinreichenden Bedingungen für einen Wendepunkt lauten zusammengefasst:

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

