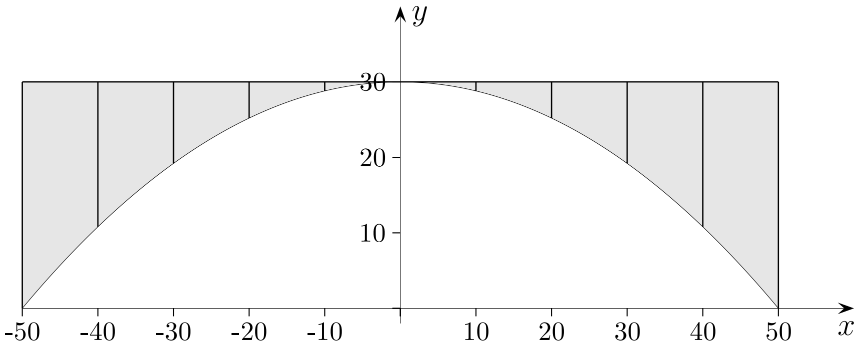
Bestimmung ganzrationaler Funktionen



1. Eine Brücke ist 30 m hoch und hat eine Spannweite von 100 m.
   Welche Parabel beschreibt die Krümmung des Stützbogens?

   Wir führen gemäß der Zeichung ein Koordinatensystem ein.
   Für die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind a, b und c so zu bestimmen, dass die Funktion für $x = 0$ den Wert 30, für $x = 50$ und für $x = -50$ den Wert 0 annimmt.

   Wegen $f(0) = 30$, $f(50) = 0$ und $f(-50) = 0$ gilt:

   $$\begin{aligned} c &= 30 \\ 0 &= 2500a + 50b + c \\ 0 &= 2500a - 50b + c \end{aligned}$$

   Aus diesen Gleichungen folgt: $b = 0,\ a = -0{,}012$.
   Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -0{,}012x^2 + 30$
   Der Ansatz $f(x) = ax^2 + c$ wäre sinnvoller gewesen.

2. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph im Ursprung ein Minimum und in $A(2 \mid 1)$ ein Maximum hat.

3. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat in $A(3 \mid 6)$ die Tangente $y = 11x - 27$ und in $B(1 \mid 0)$ einen Wendepunkt?

4. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades geht durch den Punkt $A(0 \mid 1)$ und hat dort die Steigung 2, an den Stellen $x = 2$ und $x = -2$ hat sie Tangenten parallel zur x-Achse?

5. Welches zur y-Achse symmetrische Polynom 4. Grades geht durch $A(0 \mid 2)$ und hat in $B(1 \mid 0)$ ein Minimum?

6. Welches Polynom 3. Grades hat dieselben Nullstellen wie $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3$, beide Graphen stehen im Ursprung senkrecht aufeinander?

7. Welches zum Ursprung symmetrische Polynom 3. Grades hat in $P(1 \mid 1)$ ein Maximum?

Bestimmung ganzrationaler Funktionen

2. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph im Ursprung ein Minimum und in $A(2 \mid 1)$ ein Maximum hat.

3. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat in $A(3 \mid 6)$ die Tangente $y = 11x - 27$ und in $B(1 \mid 0)$ einen Wendepunkt?

4. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades geht durch den Punkt $A(0 \mid 1)$ und hat dort die Steigung 2, an den Stellen $x = 2$ und $x = -2$ hat sie Tangenten parallel zur x-Achse?

5. Welches zur y-Achse symmetrische Polynom 4. Grades geht durch $A(0 \mid 2)$ und hat in $B(1 \mid 0)$ ein Minimum?

6. Welches Polynom 3. Grades hat dieselben Nullstellen wie $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3$, beide Graphen stehen im Ursprung senkrecht aufeinander?

7. Welches zum Ursprung symmetrische Polynom 3. Grades hat in $P(1 \mid 1)$ ein Maximum?

2. Der Ansatz lautet: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Da 4 Koeffizienten zu bestimmen sind, müssen der Aufgabenstellung 4 Bedingungen entnommen werden.

1. *Der Graph geht durch den Ursprung, d.h.* $f(0) = 0$.
2. *Der Graph hat im Ursprung eine waagerechte Tangente, also* $f'(0) = 0$.
3. *Der Graph geht durch* $A(2 \mid 1)$, *d.h.* $f(2) = 1$.
4. *Der Graph hat in* $A(2 \mid 1)$ *eine waagerechte Tangente, d.h.* $f'(2) = 0$.
   Dies ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= d \\ 0 &= c \\ 1 &= 8a + 4b \\ 0 &= 12a + 4b \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt: $a = -\frac{1}{4}, \; b = \frac{3}{4}$ *Die Funktion lautet:* $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

3.

$$\begin{aligned} 27a + 9b + 3c + d &= 6 \\ 27a + 6b + c &= 11 \\ a + b + c + d &= 0 \\ 6a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

4.

$$\begin{aligned} d &= 1 \\ c &= 2 \\ 12a + 4b + c &= 0 \\ 12a - 4b + c &= 0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x + 1$

5. Der Ansatz lautet: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$$\begin{aligned} c &= 2 \\ a + b + c &= 0 \\ 4a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$

6. Die Nullstellen lauten: $0; \; -2; \; 2$

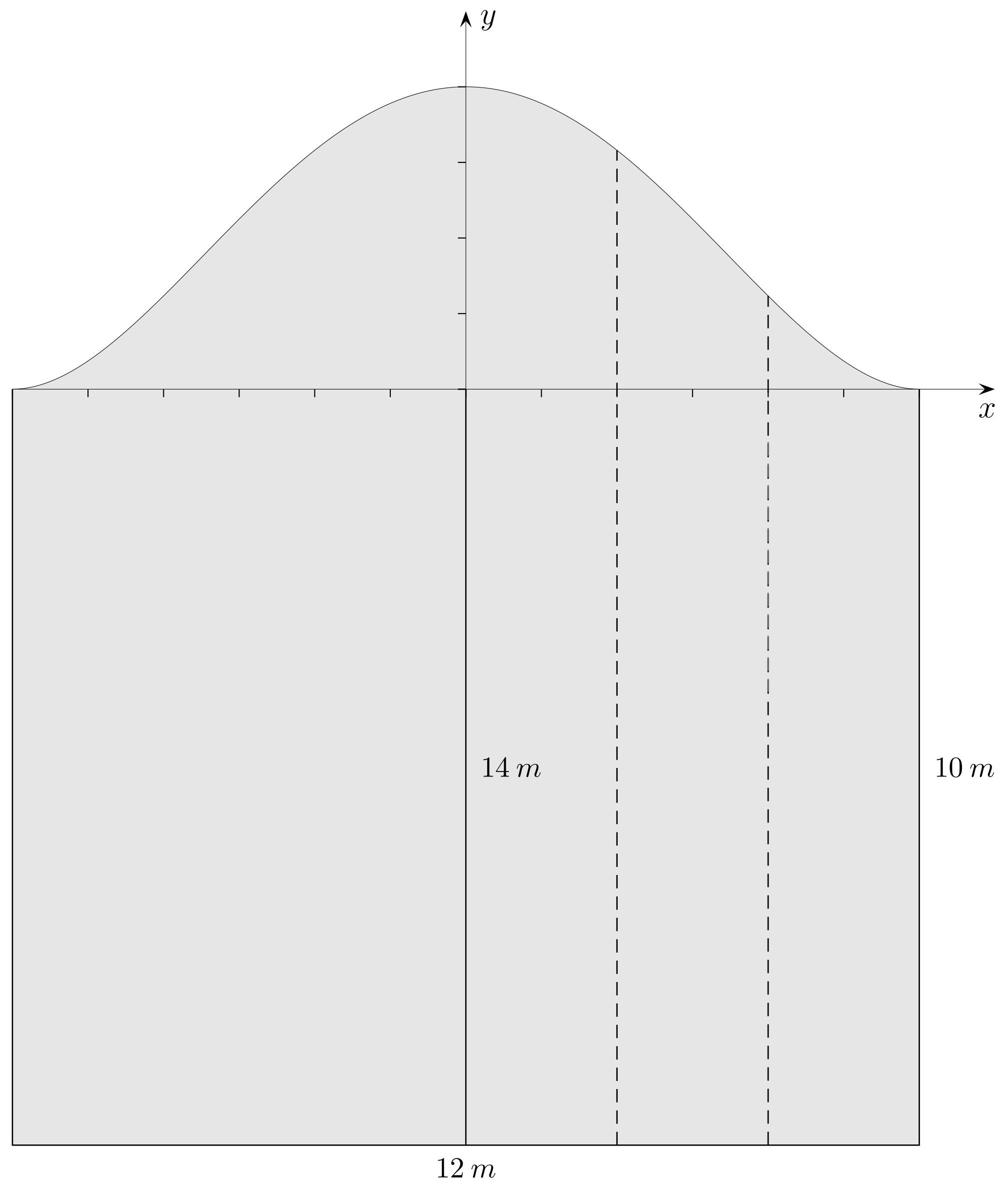
$$\begin{aligned} d &= 0 \\ -8a + 4b - 2c + d &= 0 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 0 \\ 2c &= -1 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$

7. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$

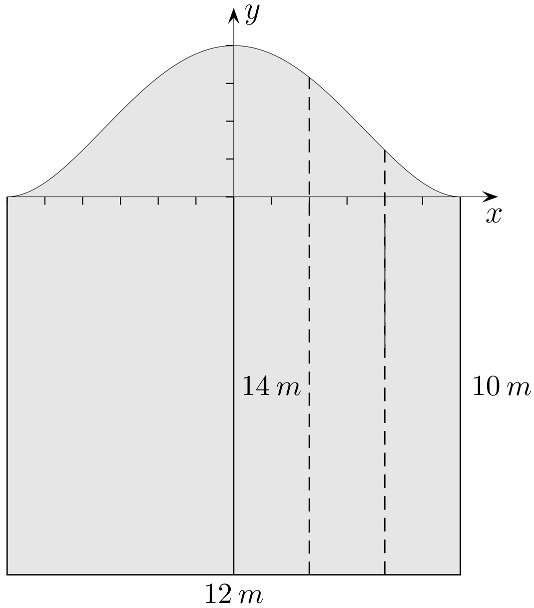
Fassade

Die Abbildung zeigt die Fassade eines Gebäudes.
Ermitteln Sie die Längen der gestrichelten Linien.
Erläutern Sie Ihr Vorgehen.



Fassade Lösungen

Die Abbildung zeigt die Fassade eines Gebäudes.
Ermitteln Sie die Längen der gestrichelten Linien.
Erläutern Sie Ihr Vorgehen.



1. Modellierung

Ansatz $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Bedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & f(0) & = & 4 \\ 2. & f(6) & = & 0 \\ 3. & f'(6) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & c & = & 4 \\ 2. & 1296a + 36b + c & = & 0 \\ 3. & 864a + 12b & = & 0 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{1}{324}x^4 - \frac{2}{9}x^2 + 4$

Längen: 13,16 m 11,23 m

2. Modellierung

Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

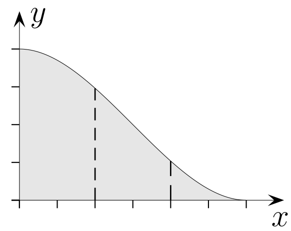
Bedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & f(0) & = & 4 \\ 2. & f'(0) & = & 0 \\ 3. & f(6) & = & 0 \\ 4. & f'(6) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & d & = & 4 \\ 2. & c & = & 0 \\ 3. & 216a + 36b + 6c + d & = & 0 \\ 4. & 108a + 12b + c & = & 0 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4$

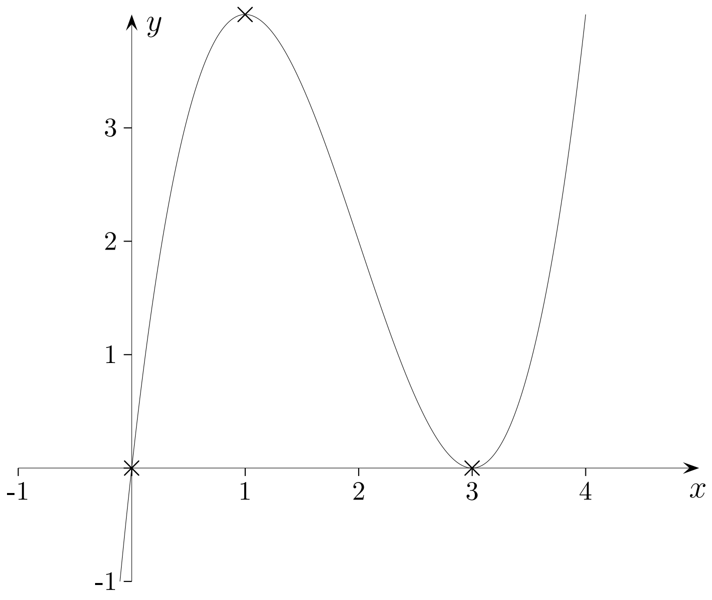
Längen: 12,96 m 11,04 m



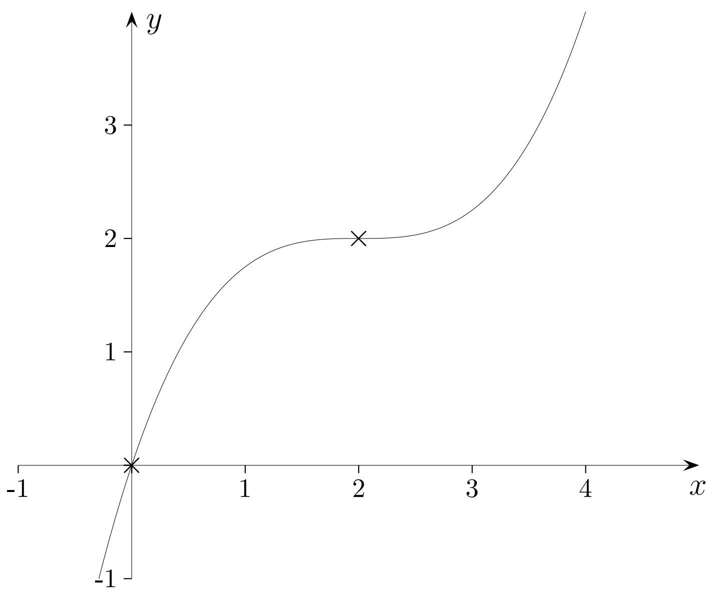
Übung

Gesucht ist eine passende Funktion.

a)



b)



Übung Lösungen

Gesucht ist eine passende Funktion.

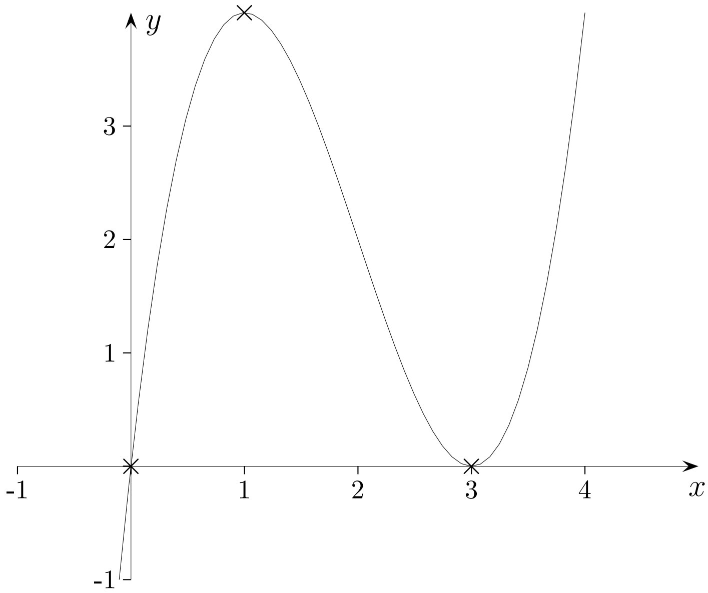
a) Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & f(0) & = & 0 \\ 2. & f(1) & = & 4 \\ 3. & f'(1) & = & 0 \\ 4. & f(3) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 1. & d & = & 0 \\ 2. & a+b+c & = & 4 \\ 3. & 3a+2b+c & = & 0 \\ 4. & 27a+9b+3c & = & 0 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$



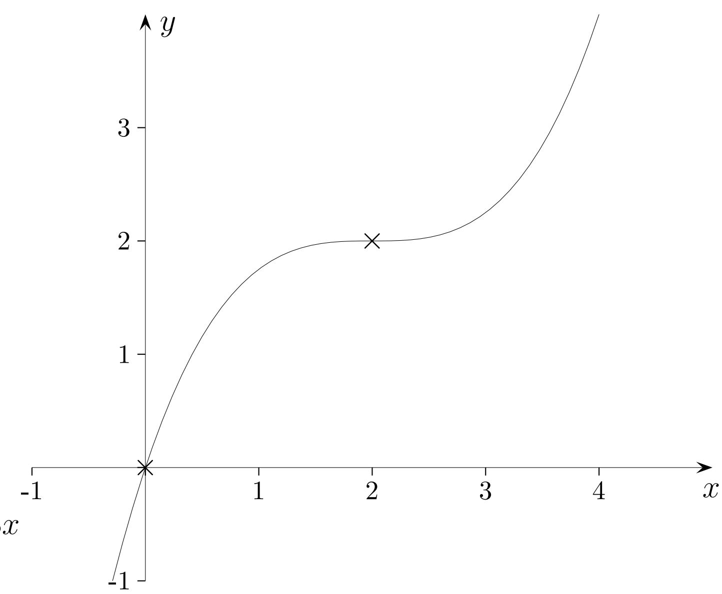
b) Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Bedingungen:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & f(0) & = & 0 \\ 2. & f(2) & = & 2 \\ 3. & f'(2) & = & 0 \\ 4. & f''(2) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 1. & d & = & 0 \\ 2. & 8a+4b+2c & = & 2 \\ 3. & 12a+4b+c & = & 0 \\ 4. & 12a+2b & = & 0 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x$



Funktionen ermitteln, GTR und algebraisch

1. Ermittle die Funktionsgleichung einer

   a) Geraden, die durch die Punkte $A(-2\,|\,1)$, $B(3\,|\,5)$ verläuft,

   b) Parabel, die durch die Punkte $A(-3\,|\,3)$, $B(3\,|\,5)$, $C(9\,|\,-1)$ verläuft,

   c) ganzrationalen Funktion 3. Grades, auf deren Graph
   die Punkte $A(0\,|\,0)$, $B(-10\,|\,50)$, $C(4\,|\,8)$, $D(10\,|\,-10)$ liegen.

2. Ermittle die Funktionsgleichung einer

   a) Parabel, die durch die Punkte $A(0\,|\,1)$, $B(-2\,|\,5)$ und den Scheitel $S(3\,|\,?\,)$ verläuft,

   b) ganzrationalen Funktion 3. Grades, auf deren Graph
   die Punkte $A(0\,|\,-5)$, $B(4\,|\,2)$ und die Extrema $E_1(-1\,|\,?\,)$, $E_2(4\,|\,?\,)$ liegen.

Funktionen ermitteln Lösungen

1. Ermittle die Funktionsgleichung einer

   a) Geraden, die durch die Punkte $A(-2\,|\,1)$, $B(3\,|\,5)$ verläuft,

   Ansatz: $y = mx + b$

   $$\begin{aligned} -2m + b &= 1 \\ 3m + b &= 5 \end{aligned}$$

   Geradengleichung: $y = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$

   b) Parabel, die durch die Punkte $A(-3\,|\,3)$, $B(3\,|\,5)$, $C(9\,|\,-1)$ verläuft,

   Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

   $$\begin{aligned} 9a - 3b + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 5 \\ 81a + 9b + c &= -1 \end{aligned}$$

   Parabelgleichung: $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + 5$

   c) ganzrationalen Funktion 3. Grades, auf deren Graph
   die Punkte $A(0\,|\,0)$, $B(-10\,|\,50)$, $C(4\,|\,8)$, $D(10\,|\,-10)$ liegen.

   Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

   $$\begin{aligned} d &= 0 \\ -1000a + 100b - 10c &= 50 \\ 64a + 16b + 4c &= 8 \\ 1000a + 100b + 10c &= -10 \end{aligned}$$

   Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + 2x$

2. Ermittle die Funktionsgleichung einer

   a) Parabel, die durch die Punkte $A(0\,|\,1)$, $B(-2\,|\,5)$ und den Scheitel $S(3\,|\,?\,)$ verläuft,

   $$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

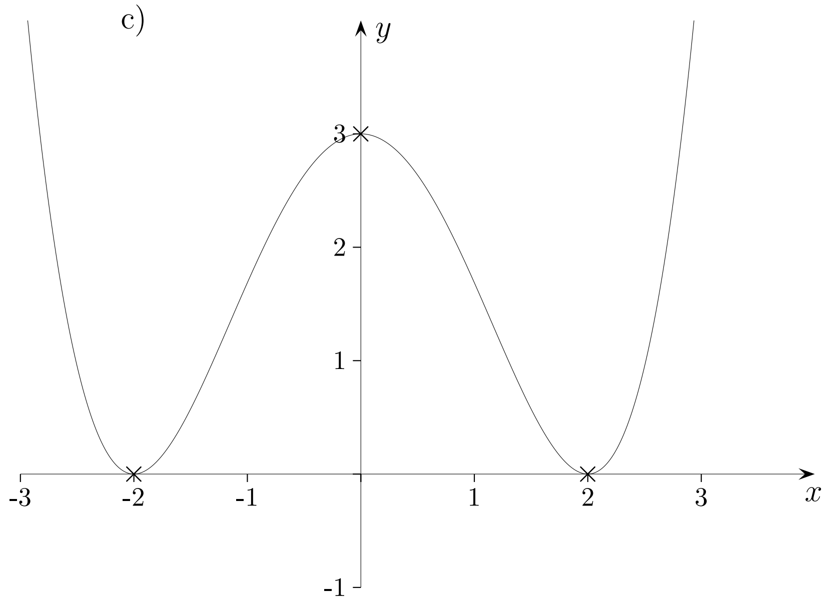
   b) ganzrationalen Funktion 3. Grades, auf deren Graph
   die Punkte $A(0\,|\,-5)$, $B(4\,|\,2)$ und die Extrema $E_1(-1\,|\,?\,)$, $E_2(4\,|\,?\,)$ liegen.

   $$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}x - 5$$

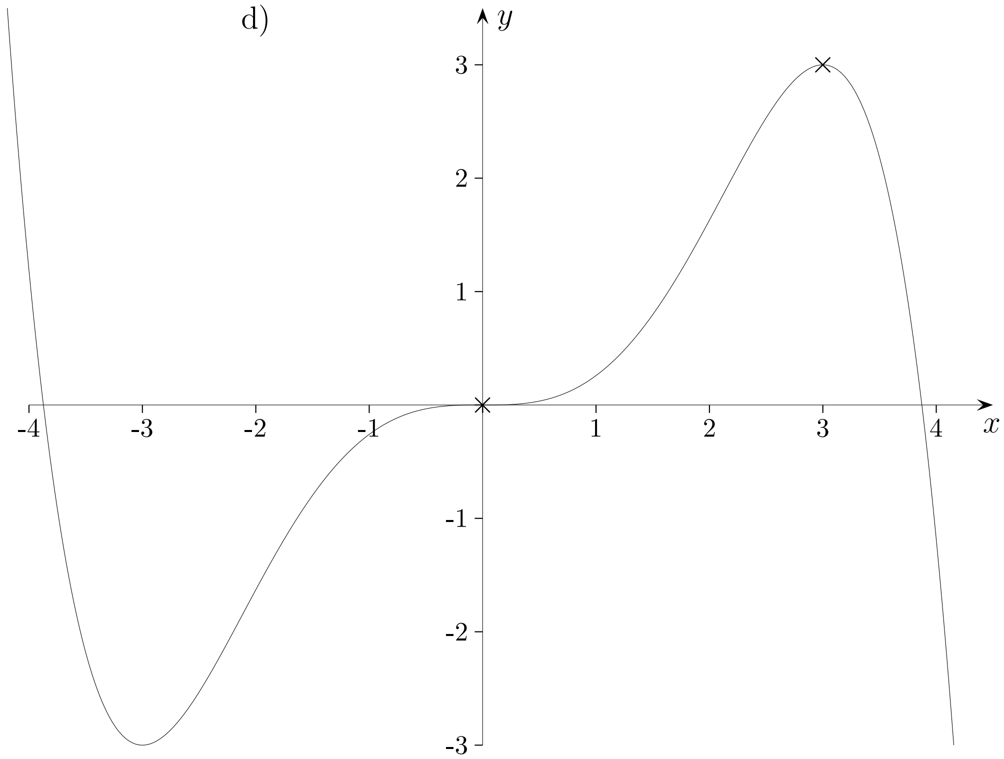
Übung

Gesucht ist eine passende Funktion.

c)



d)



Übung Lösungen

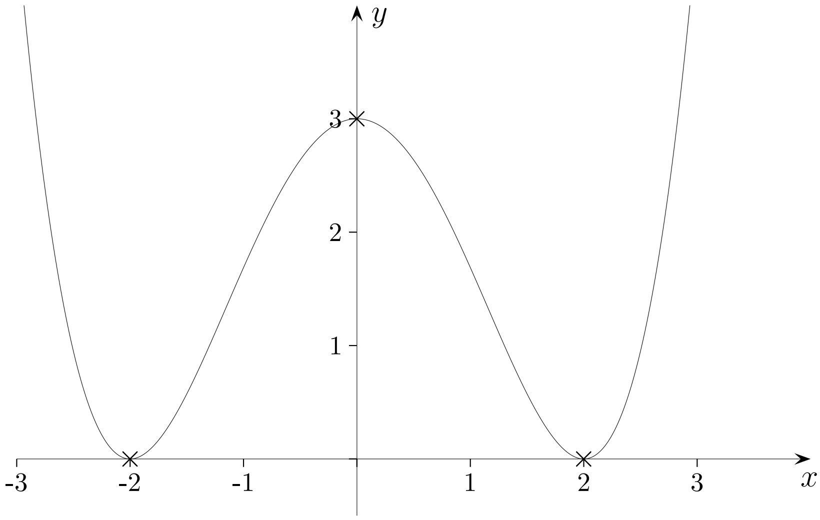
Gesucht ist eine passende Funktion.

c) Ansatz $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Bedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & f(0) & = & 3 \\ 2. & f(2) & = & 0 \\ 3. & f'(2) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & c & = & 3 \\ 2. & 16a + 4b + c & = & 0 \\ 3. & 32a + 4b & = & 0 \end{array}$$



Die Funktion lautet: $f(x) = \dfrac{3}{16}x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3$

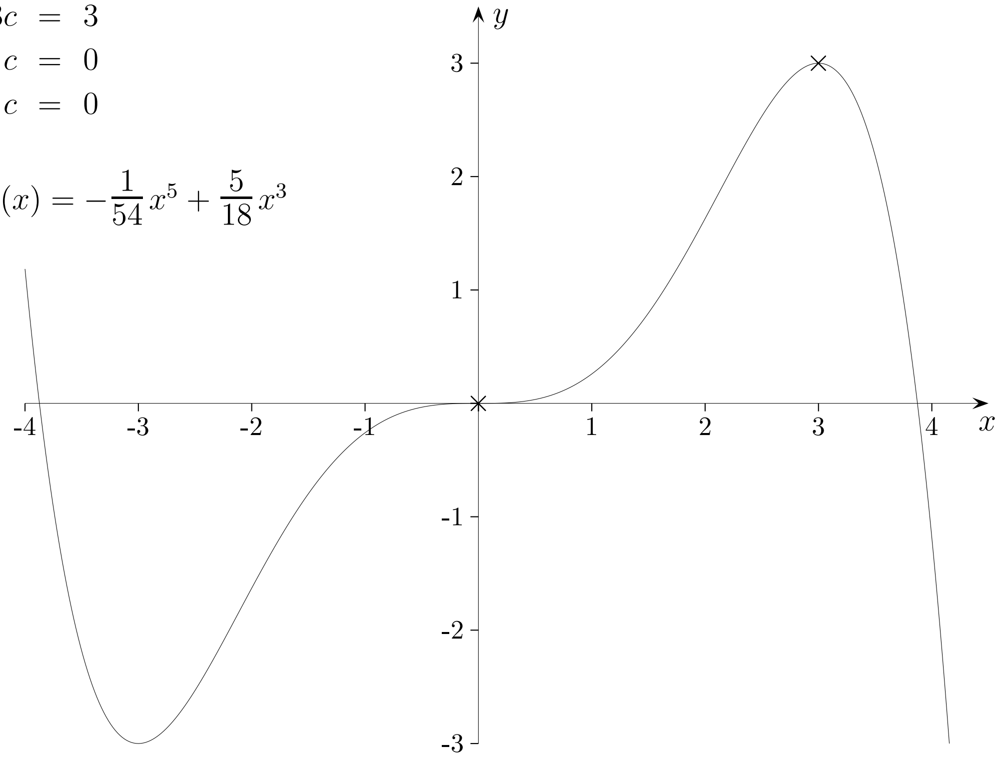
d) Ansatz $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$

Bedingungen:

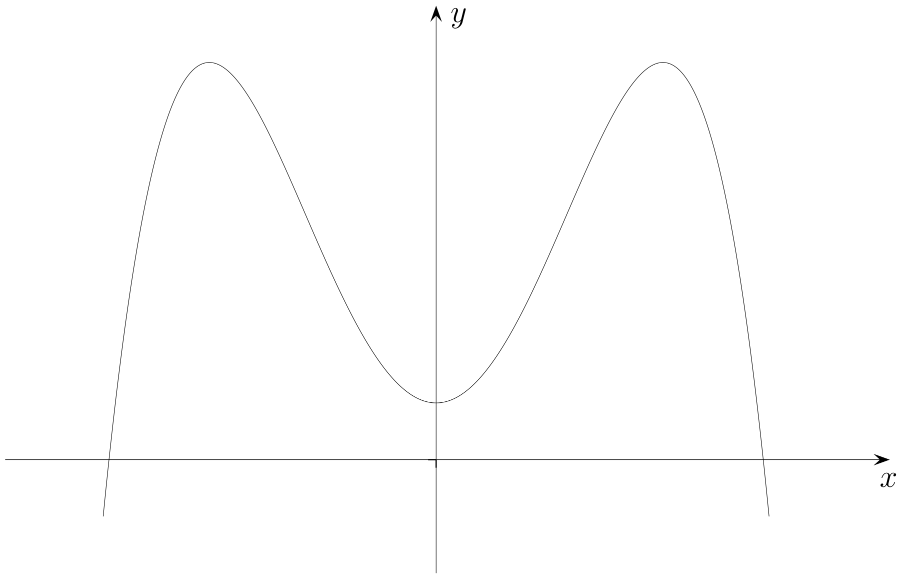
$$\begin{array}{lrcl} 1. & f(3) & = & 3 \\ 2. & f'(3) & = & 0 \\ 3. & f'(0) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & 243a + 27b + 3c & = & 3 \\ 2. & 405a + 27b + c & = & 0 \\ 3. & c & = & 0 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = -\dfrac{1}{54}x^5 + \dfrac{5}{18}x^3$

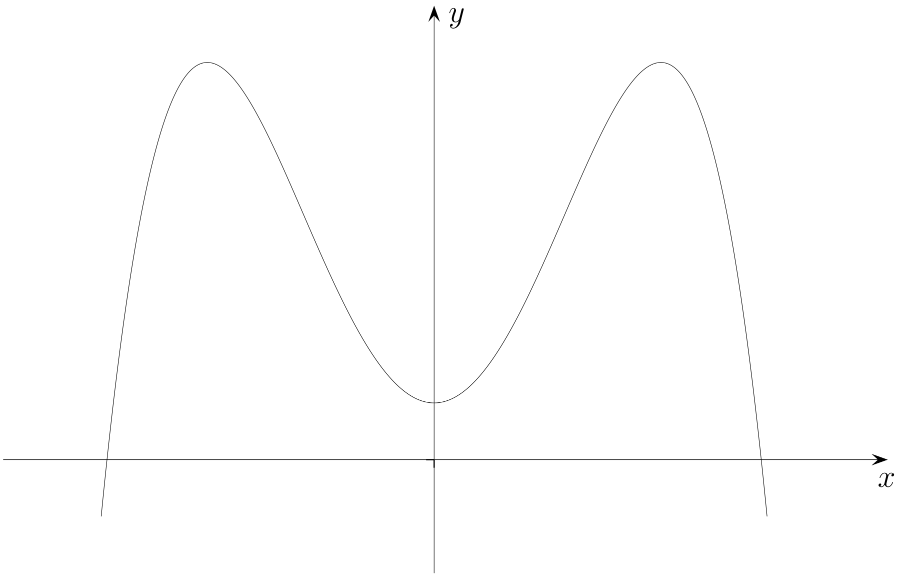


Vorzeichen der Koeffizienten



Der zur y-Achse symmetrische Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ist abgebildet. Begründe, welche Koeffizienten positiv, negativ oder Null sein müssen.

Vorzeichen der Koeffizienten



Der zur y-Achse symmetrische Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ist abgebildet. Begründe, welche Koeffizienten positiv, negativ oder Null sein müssen.

Aus $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ folgt $a < 0$.

Wegen der y-Achsensymmetrie ist $b = d = 0$.

$f(0)$ ist positiv, daher auch e.

Die 3 Extrema liegen an den Stellen $x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{2a}}$, es muss $-\dfrac{c}{2a} > 0$ sein.

Wegen $a < 0$ muss $c > 0$ sein.

Im 11. Jahrgang wird die Kurvenanpassung auf Funktionenscharen ausgedehnt, siehe 5.) Differential- und Integralrechnung, Teil 1.

Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Zusammenfassung

1.	$P(a \mid b)$ liegt auf dem Graphen von f	$f(a) = b$
2.	Nullstelle $\quad x = a$	$f(a) = 0$
3.	Extremum $E(a \mid b)$	$f(a) = b$ $f'(a) = 0$
4.	Wendepunkt $W(a \mid b)$	$f(a) = b$ $f''(a) = 0$
5.	Sattelpunkt $S(a \mid b)$	$f(a) = b$ $f''(a) = 0$ $f'(a) = 0$
6.	in $A(a \mid b)$ die Steigung m	$f(a) = b$ $f'(a) = m$
7.	Tangente $y = mx + b$ an der Stelle $x = a$	$f(a) = ma + b$ $f'(a) = m$
8.	Steigungswinkel an der Stelle $x = a$ (z.B.) $\alpha = -20°$	$f'(a) = \tan(\alpha)$
9.	12 % Anstieg, d.h. 12 m Höhenzunahme je 100 m in x-Richtung	$m = 0{,}12$

1.	ganzrationale Funktion 3. Grades	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2.	4. Grades	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
	Symmetrie ist stets auszunutzen.	
3.	y-achsensymmetrisch, Funktion 3. Grades	$f(x) = ax^2 + b$
4.	y-achsensymmetrisch, Funktion 4. Grades	$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
5.	punktsym. zum Ursprung, Funktion 3. Grades	$f(x) = ax^3 + bx$
6.	punktsym. zum Ursprung, Funktion 4. Grades	$f(x) = ax^3 + bx$
7.	punktsym. zum Ursprung, Funktion 5. Grades	$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$

Die Anzahl der Bedingungen liefert einen Hinweis auf den (maximalen) Grad des Polynoms.
Für n Bedingungen ist der Ansatz mit einem Polynom vom Grad $n - 1$ sinnvoll.
Für einen symmetrischen Ansatz werden nur diejenigen Bedingungen gezählt, die sich entweder rechts oder links von der y-Achse (einschließlich) ergeben.
Wenn die Bedingungen nur notwendig sind, muss überprüft werden, ob die Funktion das Ausgangsproblem löst. Ein unterbestimmtes Gleichungssystem führt zu einer Funktionenschar.