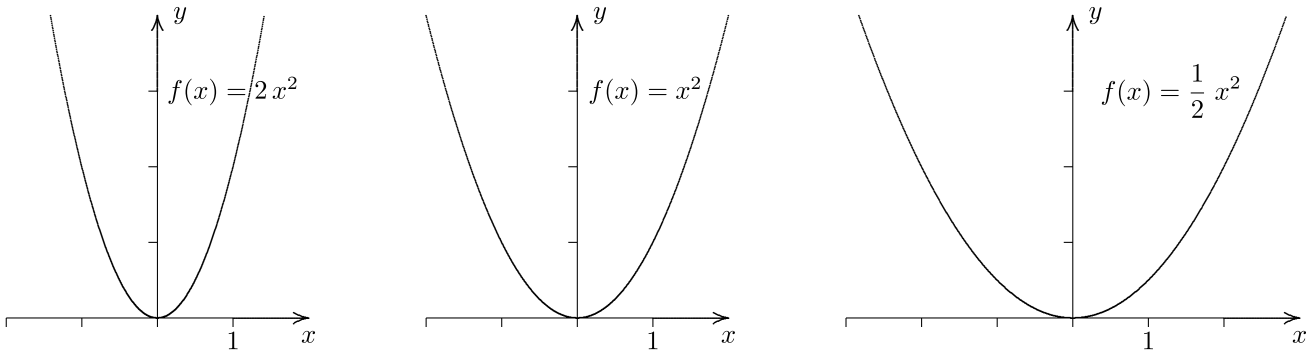
# 2. Ableitung     Krümmung



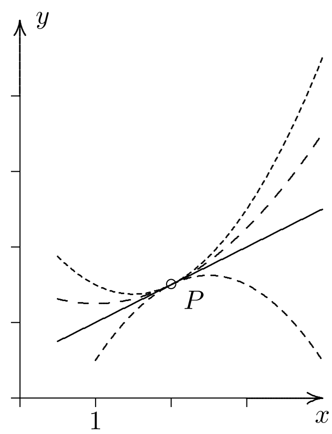

Betrachten wir die unterschiedliche Krümmung der Parabeln $f(x) = a\,x^2$ an der Stelle $x = 0$ .

Der Faktor $a$ bestimmt offensichtlich die Stärke der Krümmung.
Es gilt, wie sich leicht nachrechnen lässt, $a = \frac{1}{2} f''(0)$ .

Anders formuliert: Je größer die 2. Ableitung ist, desto stärker ist die Krümmung.

Die Tangentensteigung $f'(x_0)$ bestimmt den Anstieg einer Funktion an der Stelle $x_0$ .

$f''(x_0)$ bestimmt den Anstieg der Funktion $f'(x)$ in einer Umgebung von $x_0$ und damit die Krümmung von $f$ an dieser Stelle.




Die nebenstehende Grafik enthält eine Strecke mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$.

Weiter sind Parabelbögen mit $f''(2) = 0{,}5$ , $f''(2) = 1$ und $f''(2) = -1$ gezeichnet, die durch $P$ verlaufen und an der Stelle $x = 2$ die Steigung $m$ haben.

Ordne den Parabelbögen die 2. Ableitungswerte zu.

*Ist $f''(x_0) > 0$, so steigt $f'(x)$ in einer Umgebung von $x_0$ an.*
*Der Graph von $f$ ist hier linksgekrümmt. Er liegt oberhalb der Tangente.*

*Ist $f''(x_0) < 0$, so fällt $f'(x)$ in einer Umgebung von $x_0$.*
*Der Graph von $f$ ist hier rechtsgekrümmt. Er liegt unterhalb der Tangente.*

*In einem Wendepunkt geht eine Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung (oder umgekehrt) über.*
*Daher ist $f''(x_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunkts.*

Ausblick: Für $f(x) = x^2$ gilt $f''(x) = 2$ . Offensichtlich nimmt die Krümmung der Parabel vom Ursprung ausgehend mit größer bzw. kleiner werdenden $x$-Werten ab. Dies zeigt, dass die zweite Ableitung noch nicht allgemein die Stärke der Krümmung erfasst.

# Koeffizienten eines Polynoms

Zeige:

Für die ganzrationale Funktion vom Grad $n$

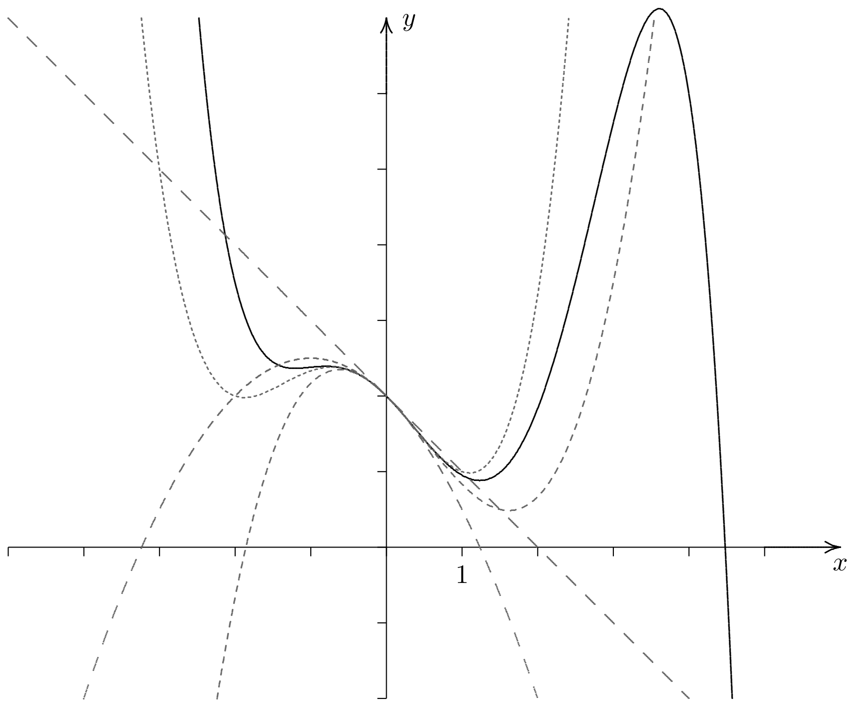
$$f(x) \;=\; a_n x^n + \;\dots\; + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

besteht zwischen den Koeffizienten und den Ableitungen an der Stelle null
folgender Zusammenhang:

$$f(0) \;=\; a_0; \quad f'(0) \;=\; a_1; \quad f''(0) \;=\; 2a_2; \quad f'''(0) \;=\; 3!\,a_3; \quad ... \;; \; f^{(n)}(0) \;=\; n!\,a_n$$

so dass gilt:

$$f(x) \;=\; \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \ldots + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'(0)}{1!}\,x + f(0)$$




Ordne den Graphen die Funktionen zu
und beschreibe den vorliegenden Sachverhalt.

$$f(x) \;=\; -\frac{3}{64}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

$$f_1(x) \;=\; -x + 2$$

$$f_2(x) \;=\; -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

$$f_3(x) \;=\; \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

$$f_4(x) \;=\; \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$