

# Tangentensteigung

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ .

Um die Steigung der Tangente im Punkt  $P(4 | 8)$  zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die Steigung

der Sekante durch  $P(4 | 8)$  und  $Q\left(4 + h \mid \frac{(4 + h)^2}{2}\right)$ .

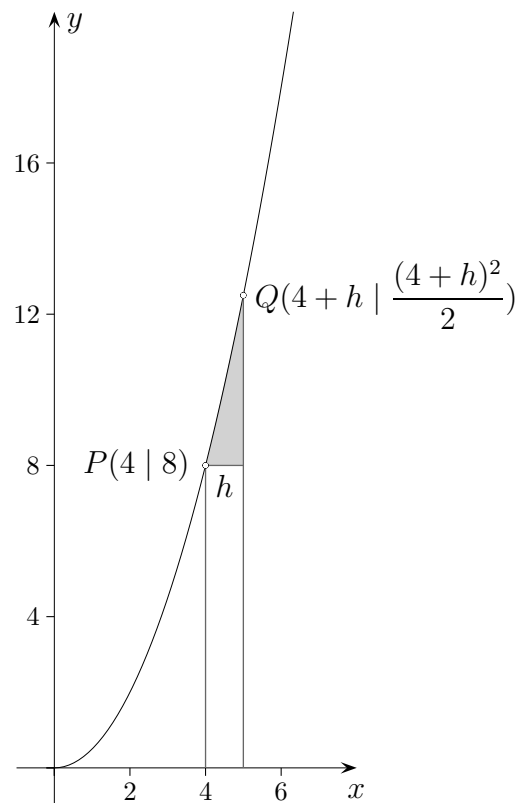
$$m_{\text{Sekante}} = \frac{\frac{(4 + h)^2}{2} - 8}{h}$$

$$= \frac{16 + 8h + h^2 - 16}{h}$$

$$= \frac{8h + h^2}{2h}$$

$$m_{\text{Sekante}} = 4 + \frac{h}{2}$$

$$m_{\text{Tangente}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(4 + \frac{h}{2}\right) = 4$$



Begründung für den letzten Schritt:

Je kleiner  $h$  ist, umso besser approximiert die Sekantensteigung die Tangentensteigung.

Um dieses zu verdeutlichen, wählen wir für  $h$  Werte, die gegen null streben und betrachten die Sekantensteigungen:

$h_1 = 0,2$	$m_1 = 4,1$
$h_2 = 0,02$	$m_2 = 4,01$
$h_3 = 0,002$	$m_3 = 4,001$
$h_4 = 0,0002$	$m_4 = 4,0001$
$h_5 = 0,00002$	$m_5 = 4,00001$
$\vdots$	$\vdots$

Die Folge der Sekantensteigungen strebt (monoton fallend, d.h. die Folgenglieder werden immer kleiner) gegen den Wert 4,0000 ..., also 4.

# Tangentensteigung

Jemand behauptet, dass die Tangentensteigung 4,00000001 beträgt.  
Wie kann dies widerlegt werden?

Wir müssen nur weit genug in der Folge  $h_n$  fortschreiten, um eine bessere Näherung für die Tangentensteigung zu erhalten. Für  $h_8 = 0,000000002$  erhalten wir  $m_8 = 4,000000001$ . Die Tangentensteigung ist kleiner als  $m_8$ , daher ist der behauptete Wert falsch.

Der Wert 4 ist der Folge der Sekantensteigungen  $m_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  eindeutig als Grenzwert zugeordnet, in der Folge selbst erscheint er nicht.

*Ausblick:*

*Der Grenzwert einer Zahlenfolge  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  ist  $a$ , falls es zu beliebig vorgegebener Stellenanzahl  $k$  jeweils eine Stelle in der Folge gibt, von wo ab die Folgenglieder mit  $a$  in den ersten  $k$  Stellen übereinstimmen.*

*Oder:*

*Zu beliebig vorgegebener Ungenauigkeit  $\epsilon$  ( griech. epsilon, z.B.  $\epsilon = 0,01$  oder  $\epsilon = 0,0001$ ,  $\epsilon$  erinnert an error) muss es jeweils eine Stelle in der Folge geben, von der ab die Abweichung der Folgenglieder von der Zahl  $a$  kleiner als die vorgegebene Ungenauigkeit ist.*