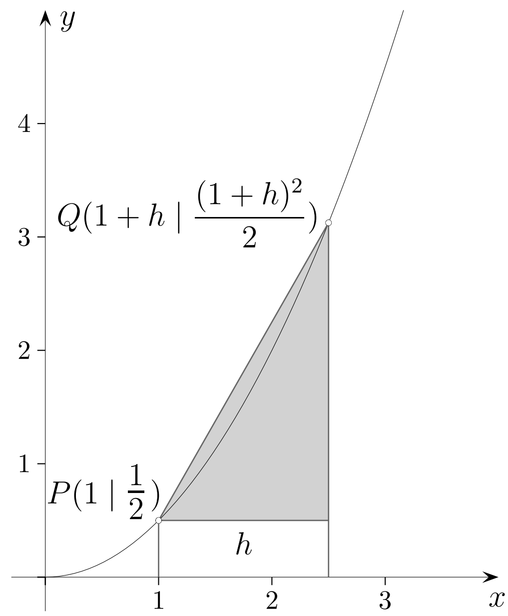
Tangentenproblem Fortsetzung

Eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung von Tangentensteigungen liegt in Folgendem:
Für die x-Koordinaten der Punktfolge:

$Q_1(3 \mid \;)$, $Q_2(2{,}5 \mid \;)$, $Q_3(2 \mid \;)$, $Q_4(1{,}5 \mid \;)$, $Q_5(1{,}1 \mid \;)$, $Q_6(1{,}01 \mid \;)$, $Q_7(1{,}001 \mid \;)$, … gilt:

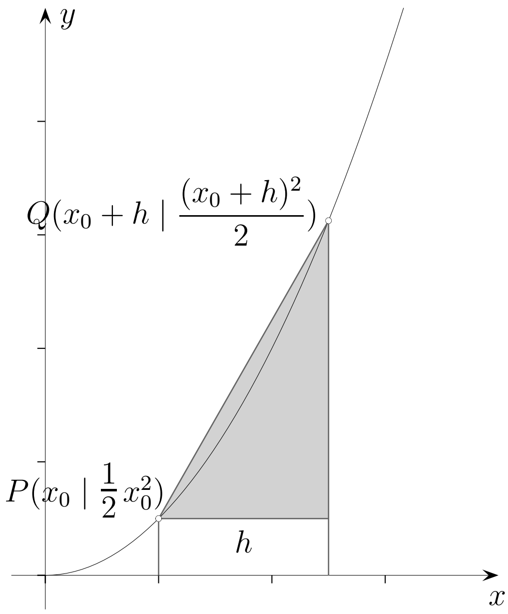
$$
\begin{array}{rcllrcl}
3 & = & 1+h_1 & \text{mit} & h_1 & = & 2 \\
2{,}5 & = & 1+h_2 & & h_2 & = & 1{,}5 \\
2 & = & 1+h_3 & & h_3 & = & 1 \\
1{,}5 & = & 1+h_4 & & h_4 & = & 0{,}5 \\
1{,}1 & = & 1+h_5 & & h_5 & = & 0{,}1 \\
1{,}01 & = & 1+h_6 & & h_6 & = & 0{,}01
\end{array}
$$



Die Punktfolge kann mit $Q(1+h \mid \frac{1}{2}(1+h)^2)$ beschrieben werden, wobei h gegen null strebt.

Für die Sekantensteigung ergibt sich dann:

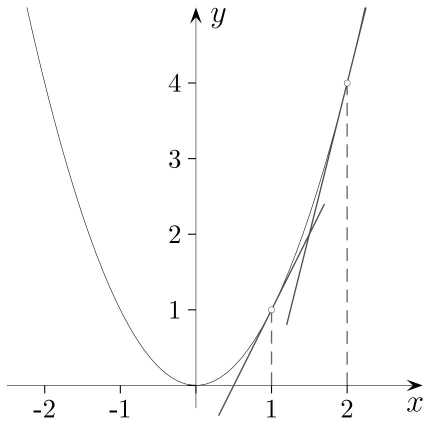
$$
\begin{aligned}
m_{\text{Sekante}} &= \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(1+2h+h^2) - \frac{1}{2}}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}}{h} \\
m_{\text{Sekante}} &= 1 + \frac{1}{2}h \\
m_{\text{Tangente}} &= \lim_{h \to 0}(1 + \frac{1}{2}h) \;=\; 1
\end{aligned}
$$



Diese Überlegungen können verallgemeinert werden. Um die Tangentensteigung im Punkt $P(x_0 \mid \frac{1}{2}x_0^2)$ zu erhalten, wird zunächst wieder die Steigung der Sekante durch P und $Q(x_0 + h \mid \frac{1}{2}(x_0+h)^2)$ betrachtet.

$$
\begin{aligned}
m_{\text{Sekante}} &= \frac{\frac{1}{2}(x_0+h)^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(x_0^2+2x_0h+h^2) - \frac{1}{2}x_0^2}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{2}x_0^2 + x_0h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{h} \\
m_{\text{Sekante}} &= x_0 + \frac{1}{2}\,h \\
m_{\text{Tangente}} &= \lim_{h\to 0}(x_0 + \frac{1}{2}\,h) \quad = \quad x_0
\end{aligned}
$$

Tangentenproblem, Zusammenhänge entdecken



Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$.
Um den Zusammenhang von x-Wert und der Steigung der Tangente an der Stelle x zu erkennen, ermitteln wir mit dem GTR die Tangentengleichungen für verschiedene Stellen.

Hierzu ist der Graph von f zu zeichnen, dann 2nd DRAW | 5: Tangent(1 ENTER für die Stelle 1 eingeben, weiter mit 2nd DRAW | 5: Tangent(2 ENTER für die Stelle 2, usw.

Der GTR liefert:

Stelle x	*Tangentengleichung*
1	$y = 2x - 1$
2	$y = 4x - 4$
3	$y = 6x - 9$
4	$y = 8x - 16$

Wir vermuten:
Für die Funktion $f(x) = x^2$ lautet an der Stelle x die Tangentensteigung $m_{\text{Tangente}} = 2x$.

Entsprechend ermitteln wir für die Funktion $f(x) = x^3$:

Stelle x	*Tangentengleichung*
1	$y = 3x - 2$
2	$y = 12x - 16$
3	$y = 27x - 54$
4	$y = 48x - 128$
5	$y = 75x - 250$

Für die Funktion $f(x) = x^3$ ist an der Stelle x die Tangentensteigung vermutlich $m_{\text{Tangente}} = 3x^2$.