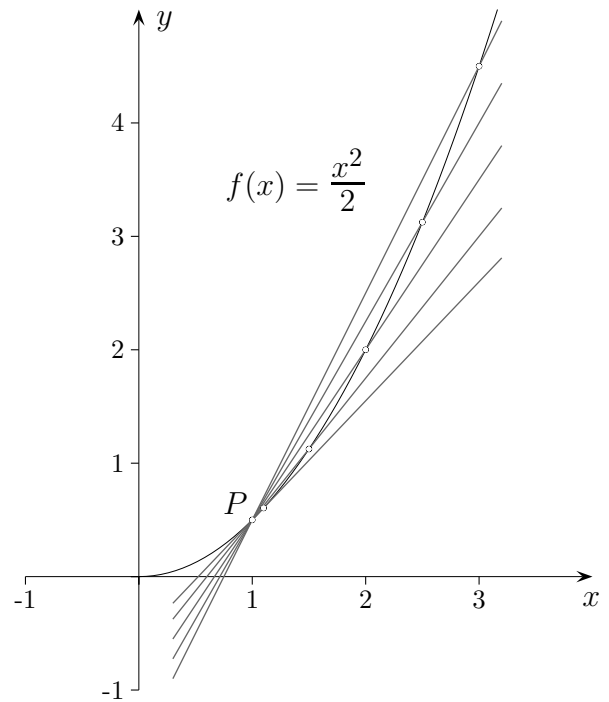


Tangentenproblem

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Um die Steigung der Tangente im Punkt $P(1 | 0,5)$ zu ermitteln, wählen wir eine Folge von Punkten, die sich von oben dem Punkt P nähern und bestimmen zu jedem Punkt die zugehörige Sekantensteigung:

$Q_1(3 4,5)$	$m_1 = 2$
$Q_2(2,5 ?)$	$m_2 = ?$
$Q_3(2 ?)$	$m_3 = ?$
$Q_4(1,5 ?)$	$m_4 = ?$
$Q_5(1,1 ?)$	$m_5 = ?$
$Q_6(1,01 ?)$	$m_6 = ?$



Rechnung für Q_1

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,5 - 0,5}{3 - 1} = 2$$

Wir vermuten, dass die Tangentensteigung 1 beträgt. Um diese Vermutung zu untermauern, wählen wir eine zweite Folge von Punkten, die sich von unten dem Punkt P nähern, wieder bestimmen wir die Sekantensteigungen:

$R_1(0,5 0,125)$	$m_1^* = 0,75$
$R_2(0,9 ?)$	$m_2^* = ?$
$R_3(0,99 ?)$	$m_3^* = ?$
$R_4(0,999 ?)$	$m_4^* = ?$

Die Tangentensteigung ist kleiner als jedes Folgenglied $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, \dots$ und größer als $m_1^*, m_2^*, m_3^*, m_4^*, \dots$

Es gibt nur eine Zahl, die dies erfüllt, nämlich 1.

$$m_{\text{Tangente}} = 1$$

Im nachhinein ist ersichtlich, dass eine einzige Folge von Punkten, die sich P nähern, ausgereicht hätte, um die Tangentensteigung zu erkennen.

Tangentenproblem

$Q_1(3 \mid 4,5)$	$m_1 = 2$
$Q_2(2,5 \mid 3,125)$	$m_2 = 1,75$
$Q_3(2 \mid 2)$	$m_3 = 1,5$
$Q_4(1,5 \mid 1,125)$	$m_4 = 1,25$
$Q_5(1,1 \mid 0,605)$	$m_5 = 1,05$
$Q_6(1,01 \mid 0,51005)$	$m_6 = 1,005$

$R_1(0,5 \mid 0,125)$	$m_1^* = 0,75$
$R_2(0,9 \mid 0,405)$	$m_2^* = 0,95$
$R_3(0,99 \mid 0,49005)$	$m_3^* = 0,995$
$R_4(0,999 \mid 0,4990005)$	$m_4^* = 0,9995$

Geschwindigkeit

Wir stellen uns vor, einen Stein von einem hohen Gebäude fallen zu lassen und interessieren uns für den Zusammenhang von verstrichener Zeit x (in Sekunden) und zurückgelegter Fallstrecke y (in Metern). Die Tabelle enthält mögliche Messwerte.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	5	20	45	80	125

Um die Beziehung von x und y aufzudecken, teilen wir die y -Werte durch 5.

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{y}{5}$	0	1	4	9	16	25

Nun können wir erkennen, dass stets gilt:

$$\frac{y}{5} = x^2$$

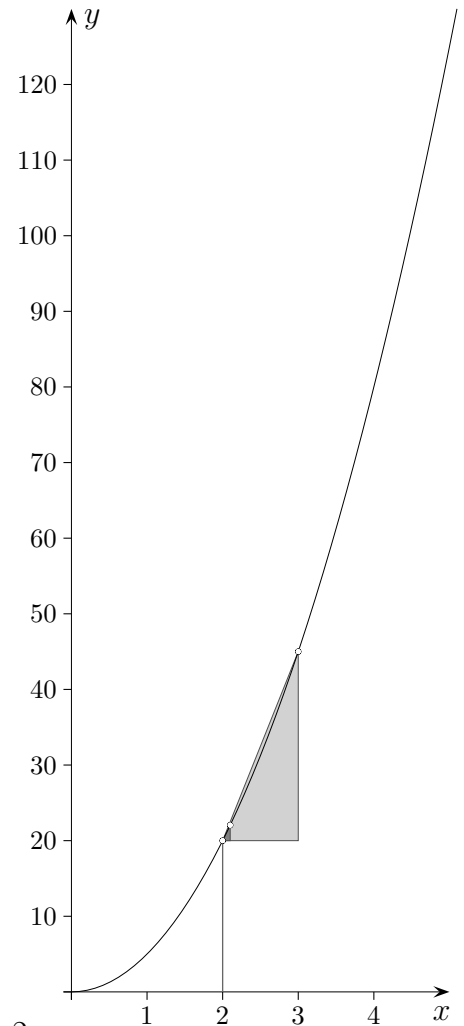
$$y = 5x^2$$

Der Graph veranschaulicht den Zusammenhang.

Wir wenden uns nun der Frage zu:

Wie groß ist die Geschwindigkeit des Steins zur Zeit (z. B.) $x = 2$?

Es scheint offensichtlich, dass zu jedem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit vorliegt, andererseits verstehen wir unter der Geschwindigkeit v den Quotienten von zurückgelegtem Weg und verstrichener Zeit. Für eine Berechnung ist daher neben $x = 2$ ein weiterer Zeitpunkt erforderlich. Das Problem ist, dass die so ermittelte Geschwindigkeit von der Wahl des zweiten Zeitpunkts abhängt. Die folgende Tabelle verdeutlicht dies.



x	2	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001
$y = 5x^2$	20	45	22,05	20,2005	20,020005	20,00200005	20,0002000005
$v = \frac{y-20}{x-2}$		25	20,5	20,05	20,005	20,0005	20,00005

Erläutere, was unter der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $x = 2$ sinnvollerweise zu verstehen ist. Was sagt die so verstandene Geschwindigkeit über den Bewegungsvorgang aus?

Verallgemeinere diese Überlegungen.

Roofls