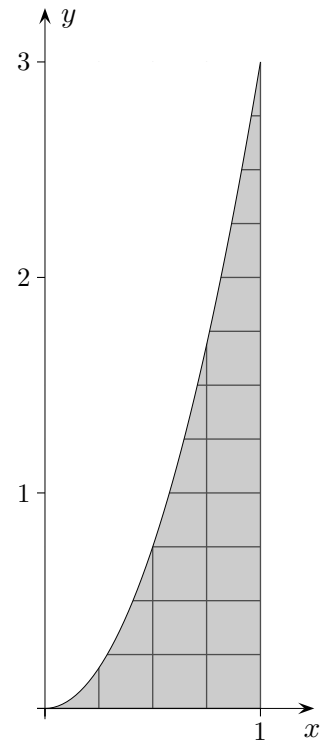


Intervallschachtelung

In der Antike beschäftigten sich Mathematiker wie Archimedes von Syrakus (287 - 212 v. Chr.) unter anderem mit der Flächenberechnung krummlinig begrenzter Figuren (Kreis, Parabelsegment), indem sie die Figuren durch Rechtecke bzw. Dreiecke annähernten (approximierten).

Erst im 17. Jahrhundert entdeckten Barrow, Newton und Leibniz die allgemeinen Zusammenhänge, deren Behandlung in der Oberstufe erfolgt. Um die Schlussweisen zu verstehen, gehen wir der Frage nach, wie man aufgrund von Näherungsrechnungen zu einem exakten Ergebnis gelangen kann.



Für den Inhalt A der Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = 3x^2$ in den Grenzen von 0 bis 1 gilt (die Herleitung erfolgt später):

$$\begin{aligned} 0,9 &< A < 1,1 \\ 0,99 &< A < 1,01 \\ 0,999 &< A < 1,001 \\ 0,9999 &< A < 1,0001 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aus dieser sogenannten *Intervallschachtelung* kann der exakte Flächeninhalt A erkannt werden. Begründe, dass $A \neq 1$ nicht möglich ist.

Jede reelle Zahl, also z.B. $3, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, \pi, \lg 3$, kann durch eine Intervallschachtelung erfasst werden.

1. Auf welche Zahl x (den *Grenzwert, Limes*) zieht sich die Intervallschachtelung zusammen?

<p>a)</p> $\begin{aligned} 0,3 &< x < 0,4 \\ 0,33 &< x < 0,34 \\ 0,333 &< x < 0,334 \\ 0,3333 &< x < 0,3334 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$	<p>b)</p> $\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 2 \\ 1 + \frac{1}{2} &\leq x \leq 2 \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &\leq x \leq 2 \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &\leq x \leq 2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$
--	--

2. Ausblick: Die Funktion $f(x) = e^x$ ($e = 2,718\dots$) hat eine bedeutsame Eigenschaft. An jeder Stelle sind Tangentensteigung und Funktionswert gleich groß.

$$\begin{aligned} (1+1)^1 &< e < (1+1)^2 \\ (1+\frac{1}{2})^2 &< e < (1+\frac{1}{2})^3 \\ (1+\frac{1}{3})^3 &< e < (1+\frac{1}{3})^4 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

3. Begründe, dass durch die Reihen eine Intervallschachtelung gegeben ist.

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$	Später wird bewiesen, dass der Grenzwert der Schachtelung $\frac{2}{3}$ ist.
b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$	Leibniz bewies, dass der Grenzwert der Intervallschachtelung $\frac{\pi}{4}$ ist.

