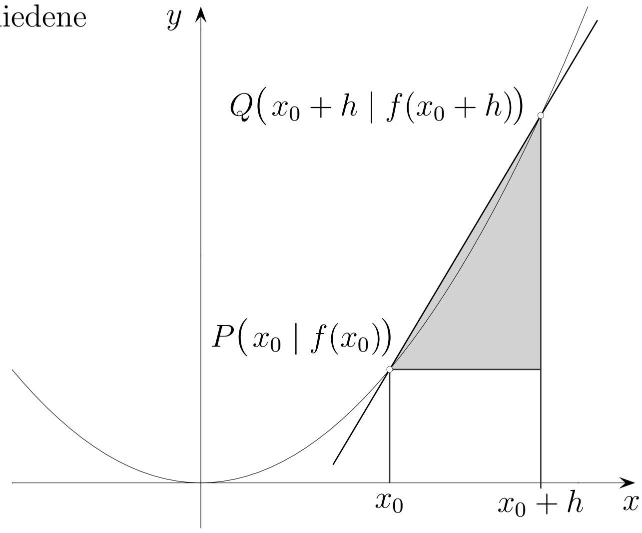
Differentialrechnung   Anfänge

(Leibniz 1646-1716, Newton 1643-1727)

Wir ermitteln die Tangentensteigungen für verschiedene Funktionen f im Punkt $P\big(x_0 \mid f(x_0)\big)$.



$f(x) = x^2$	$2x_0$	*Vermutung:*
$f(x) = x^2 + 3$	$2x_0$	*Eine Zahl als Summand fällt weg.*
$f(x) = 4x^2$	$8x_0$	*Eine Zahl als Faktor bleibt erhalten.*
$f(x) = x^2 + 4x$	$2x_0 + 4$	
$f(x) = x^3$	$3x_0^2$	
$f(x) = x^3 + x^2$	$3x_0^2 + 2x_0$	*Summanden werden einzeln betrachtet.*
$f(x) = x^n$	nx^{n-1}	

Statt z. B. $m_{Tangente} = 2x_0$ schreiben wir $f'(x) = 2x$ oder $(x^2)' = 2x$.
$f'(x) = 2x$ heißt 1. Ableitung von $f(x) = x^2$.
Die Funktion $f(x) = x^2$ wurde abgeleitet oder differenziert.
$f'(4) = 8$ bedeutet, dass die Tangentensteigung an der Stelle $x = 4$ (also im Punkt $P\big(4 \mid 16\big)$) 8 beträgt.

Das allgemeine Vorgehen, um die 1. Ableitung zu ermitteln, lautet:

$$m_{Tangente} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Der auf der rechten Seite stehende Quotient heisst Differenzenquotient.
Nun sind wir in der Lage, Extrema (Minimum und Maximum) zu berechnen, genauer, die Punkte mit waagerechter Tangente, für die also $f'(x) = 0$ gilt.

In welchen Punkten besitzt die Funktion waagerechte Tangenten?

a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$

b) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 7$

In welchen Punkten besitzt die Funktion waagerechte Tangenten?

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 7$

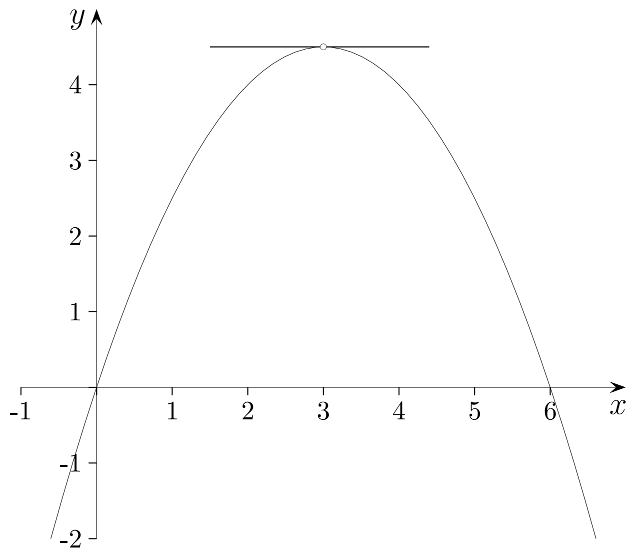
e) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 9x$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

Anfänge der Differentialrechnung

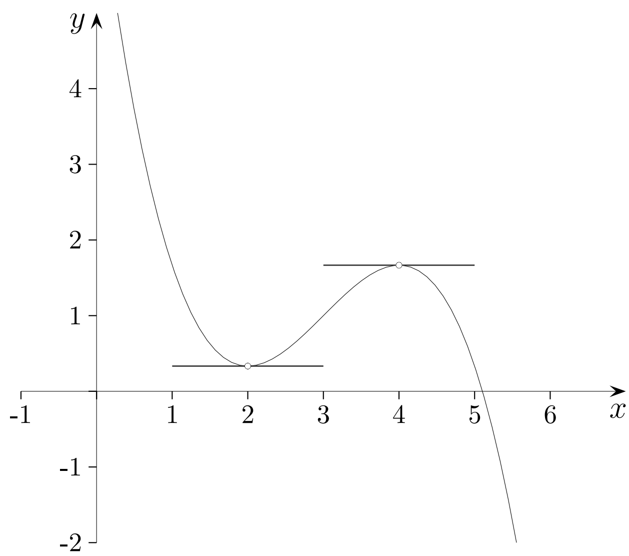
Lösungen:

a) $$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x \\ f'(x) &= -x + 3 \\ 0 &= -x + 3 \\ x &= 3 \qquad \mathit{Max}\big(3 \mid 4{,}5\big) \end{aligned}$$



b) $$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 7 \\ f'(x) &= -x^2 + 6x - 8 \\ 0 &= -x^2 + 6x - 8 \end{aligned}$$

$x_1 = 4,\ \ x_2 = 2,\ \ E_1\big(4 \mid \frac{5}{3}\big),\quad E_2\big(2 \mid \frac{1}{3}\big)$



c) $E_1\big(0 \mid 8\big),\quad E_2\big(2 \mid 4\big)$

d) $E_1\big(3 \mid 7\big),\quad E_2\big(1 \mid 11\big)$

e) $E_1\big(\frac{3}{2} \mid -\frac{27}{2}\big),\quad E_2\big(-\frac{1}{2} \mid \frac{5}{2}\big)$

f) $E_1\big(0 \mid 0\big),\quad E_2\big(2 \mid -\frac{4}{3}\big)$