

Grafische Auswertung von Messergebnissen

1. Grundkenntnisse:

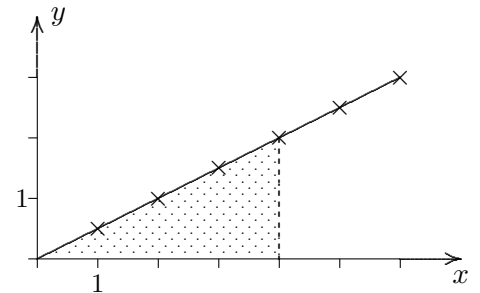
Zwischen den Größen x und y bestehe die proportionale Beziehung ($y \sim x$):

x	1	2	3	4	5	6
y	0,5	1	1,5	2	2,5	3

genauer: $y = \frac{1}{2}x$.

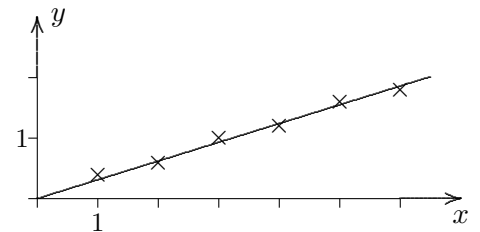
Der Faktor $\frac{1}{2}$ ($= \frac{y}{x}$) ist die Steigung der Geraden.

Der Ansatz $y = ax$, ein beliebiger Punkt $P(x_o|y_o)$, z.B. $P(4|2)$, Einsetzen und Auflösen nach a führen auch zum Ergebnis $a = \frac{1}{2}$.



2. Wie kann ein proportionaler Zusammenhang aufgedeckt werden, falls die Tabellen-Werte fehlerbehaftet sind?

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	0,4	0,6	1,0	1,2	1,6	1,8

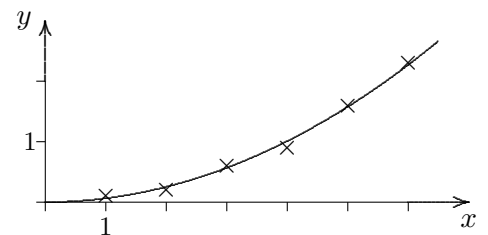


Die Wertepaare werden grafisch dargestellt.

Nach Augenmaß wird eine Ausgleichsgerade durch den Ursprung gezeichnet und deren Steigung ermittelt. Wir erhalten $y \sim x$, genauer: $y = 0,31x$.

3. Die Grafik lässt einen parabelförmigen Kurvenverlauf, d.h. einen quadratischen Zusammenhang $y = ax^2$ vermuten.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	0,1	0,2	0,6	0,9	1,6	2,3



Lägen alle Punkte auf der Parabel, so könnte a mit einem Punkt $P(x_o|y_o)$ durch Einsetzen in $y = ax^2$ und Auflösen bestimmt werden, $a = \frac{y_o}{x_o^2}$.

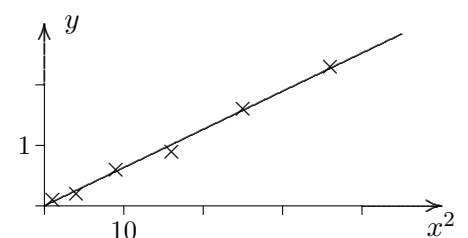
Aufgrund der Messfehler wären alle Quotienten der folgenden Wertepaare zu betrachten.

x^2	0	1 ²	2 ²	3 ²	4 ²	5 ²	6 ²
y	0	0,1	0,2	0,6	0,9	1,6	2,3

Diese Wertepaare werden nun grafisch dargestellt.

Die Ausgleichsgerade belegt $y \sim x^2$.

Die Steigung der Geraden ist ein Näherungswert für a , wir erhalten $a = 0,063$ und insgesamt $y = 0,063x^2$.

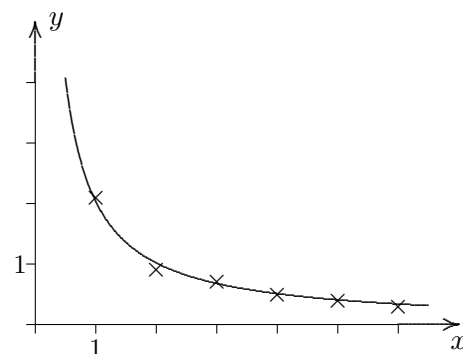


Grafische Auswertung von Messergebnissen Fortsetzung

4. Die Grafik lässt einen hyperbelartigen Kurvenverlauf, d.h. einen antiproportionalen Zusammenhang

$$y = \frac{a}{x} \text{ vermuten.}$$

x	1	2	3	4	5	6
y	2,1	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3



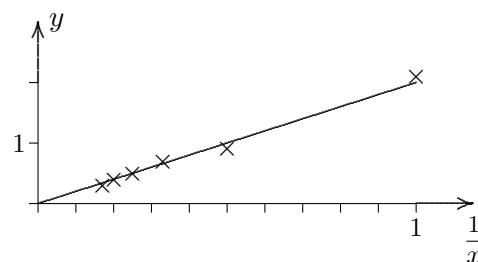
Lägen alle Punkte auf der Hyperbel, so könnte a mit einem Punkt $P(x_o|y_o)$ durch Einsetzen in $y = \frac{a}{x}$ und Auflösen bestimmt werden, $a = \frac{y_o}{\frac{1}{x_o}}$.

Aufgrund der Messfehler wären alle Quotienten der folgenden Wertepaare zu betrachten.

$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
y	2,1	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3

Die Ausgleichsgerade belegt $y \sim \frac{1}{x}$.

In diesem Fall ist $a = 2,0$ und insgesamt dann $y = \frac{2,0}{x}$.



5. Wie ist vorzugehen, um Vermutungen wie $y = a\sqrt{x}$ oder $y = \sqrt{\frac{a}{x}}$ zu untersuchen?

6. Für einen vermuteten Zusammenhang $y = e^{ax}$ erhalten wir durch Auflösen $a = \frac{\ln y}{x}$.

Zum Zeichnen der Ausgleichsgeraden sind daher die Logarithmen der y -Werte zu bilden:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...
$\ln y$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	$\ln y_4$...

7. Aus $y = x^a$ folgt $a = \frac{\ln y}{\ln x}$.

Für diese Potenzfunktionen sind die Logarithmen der x - und y -Werte zu bilden:

$\ln x$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	$\ln x_4$...
$\ln y$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	$\ln y_4$...

Auswertung von Messergebnissen mit dem TI-83

- Um die Steigung a der Ausgleichsgeraden (Regressionsgeraden) durch den Ursprung zu ermitteln, reicht es in vielen Fällen aus, den Schwerpunkt der Messpunkte zu betrachten. Dies führt zu:

$$a = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

a ist auch Lösung der Gleichung: $y_1 - ax_1 + y_2 - ax_2 + \dots + y_n - ax_n = 0$.
Die Punkte sind dann so um die Gerade verteilt, dass sich die y -Differenzen $y_i - ax_i$ ausgleichen.

x -Werte in L1,
 y -Werte in L2 eintragen,
sum(L2)/sum(L1)

sum ist zu finden unter:
2nd LIST MATH 5: sum(

- Eine Berechnung der Steigung a aufgrund der Methode der kleinsten Quadrate ergibt:

$$a = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

An der Stelle a liegt ein Minimum der Funktion
 $d(a) = (y_1 - ax_1)^2 + (y_2 - ax_2)^2 + \dots + (y_n - ax_n)^2$ vor.
Die Ursprungsgerade liegt nun so, dass die Quadratsumme der y -Differenzen zu den Punkten minimal wird.

sum(L1 * L2)/sum(L1²)

L1	L2	L3
...	...	

↙ "L1²"

- Falls zunächst die x -Werte quadriert oder von ihnen reziproke Werte gebildet werden müssen, so kann dies in L3 erfolgen. Anschließend wird das Obige auf L2 und L3 angewandt.

sum(L2)/sum(L3)
oder
sum(L2 * L3)/sum(L3²)