

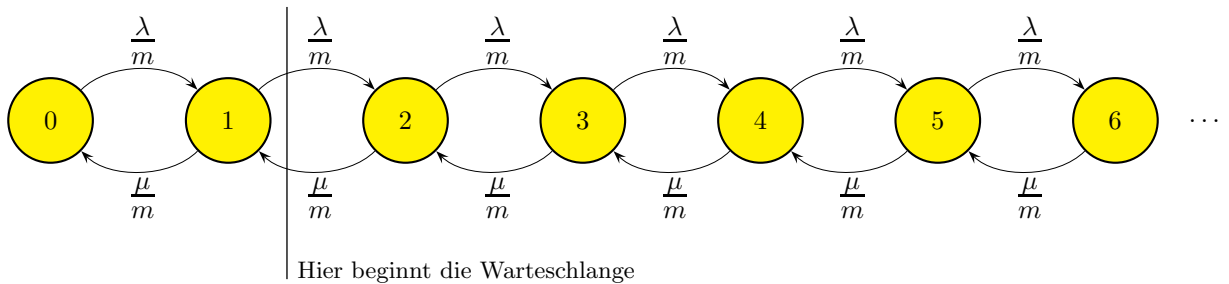
# Warteschlangentheorie

Ankunftsrate  $\lambda$ , z.B. 15 Personen pro Stunde

Bedienrate  $\mu$ , z.B. 20 Personen pro Stunde

$m$  sei so groß gewählt, dass pro Takt höchstens eine Person ankommt, bzw. abgefertigt wird.

Mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{\lambda}{m}$  erhöht sich die Anzahl der Personen um Eins, mit  $1 - \frac{\lambda}{m} - \frac{\mu}{m}$  bleibt die Anzahl gleich.



Wir haben es hier mit einer Irrfahrt eines Teilchens auf einem Graphen zu tun (Markow-Kette).

Es startet in einem beliebigen Zustand. Uns interessiert die durchschnittliche Länge der Warteschlange, die Verweil- und die Wartezeit.

Ermitteln wir zunächst die stationäre Verteilung  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$

mit den Gleichgewichtsbeziehungen:

$$1. \quad \frac{\lambda}{m} \cdot p_0 = \frac{\mu}{m} \cdot p_1$$

oder

$$1. \quad \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1 \quad m \text{ fällt stets heraus, wir lassen es zukünftig gleich weg.}$$

$$2. \quad \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_1 = \lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_2$$

und mit 1.

$$2. \quad \lambda \cdot p_1 = \mu \cdot p_2 \quad \text{entsprechend}$$

$$3. \quad \lambda \cdot p_2 = \mu \cdot p_3$$

...

Damit erhalten wir:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot p_0$$

...

Die Summe der geometrischen Reihe beträgt 1, daraus folgt mit der Summenformel  $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ .

Das Ergebnis kann einfacher direkt  $\mu(1 - p_0) = \lambda$  entnommen werden, siehe 1., 2., ...

---

*Roolfs*

## Warteschlangentheorie Formeln

$$L_{\text{Anzahl der Personen im System}} = \sum_{n \geq 0} n p_n = (1 - \rho) \sum_{n \geq 0} n \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_{\text{Anzahl der Personen in der Warteschlange}} = \sum_{n \geq 2} (n - 1) p_n = \dots = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Die mittlere Bedienungsdauer eines Kunden ist  $\frac{1}{\mu}$ , wenn er das System im Zustand  $n$  vorfindet, beträgt seine Zeit im System  $\frac{n+1}{\mu}$ .

$$W_{\text{Zeit, die ein Kunde im System verbringt}} = \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{\mu} p_n = \dots = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - \rho} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Das Ergebnis liegt nahe. Ein Kunde findet ein System vor, dessen Abarbeitung

$L_{\text{Anzahl der Personen im System}} \cdot \frac{1}{\mu}$  dauert. Seine eigene Bedienungsdauer ist zu addieren.

Offensichtlich gilt:

$$W_{\text{Wartezeit, die ein Kunde in der Schlange verbringt}} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Für die Herleitungen wird die Formel

$$\sum_{n \geq 0} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad |q| < 1$$

herangezogen.

Little bewies 1961:

$$L_{\text{Anzahl der Personen in der Warteschlange}} = \lambda \cdot W_{\text{Wartezeit, die ein Kunde in der Schlange verbringt}}$$

Die Aussage

$\frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{Anzahl der Personen in der Warteschlange}} = W_{\text{Wartezeit, die ein Kunde in der Schlange verbringt}}$  erscheint plausibel.  $\frac{1}{\lambda}$  ist die Zeit, die zwischen zwei Ankünften verstreicht.

Dies muss auch die Wartezeit einer Person für das Aufrücken um einen Platz sein, wenn die Schlängellänge als gleichbleibend angesehen wird.

---

*Roofls*

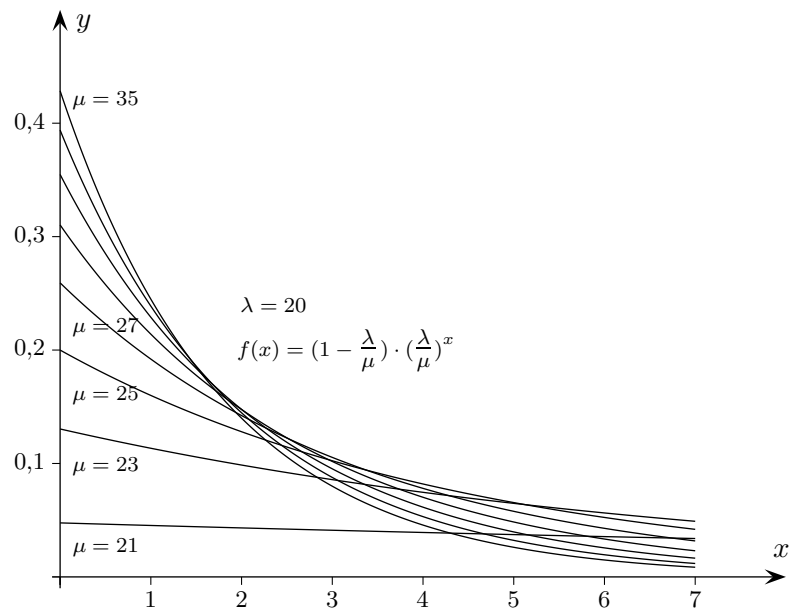
## Der Fall $\lambda = \mu$

Die Formeln setzen  $\lambda < \mu$  voraus.

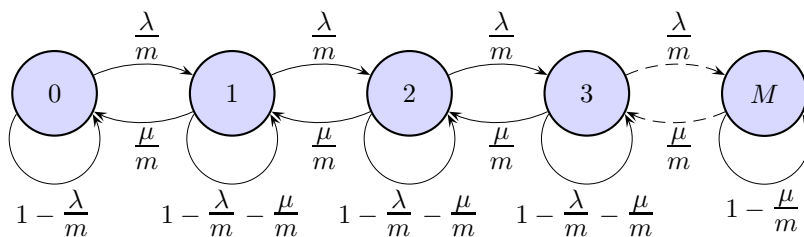
Wird die Differenz kleiner, so vergrößert sich die Warteschlangenlänge und die Wartezeit, obwohl  $\lambda = \mu$  eine ausgeglichene Situation nahezulegen scheint.

Die Graphen für die stationären Verteilungen sind aufschlussreich.

Für kleiner werdende Differenz gleichen sich die Wahrscheinlichkeiten immer mehr an.



Für  $\lambda = \mu$  kann keine stationäre Verteilung existieren, jedoch für ein System mit begrenzter Länge  $M$ , hier gezeichnet für  $M = 4$ .



Die Übergangsmatrix lautet ( $a = \frac{\lambda}{m}$ ):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-2a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-2a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1-a \end{pmatrix}$$

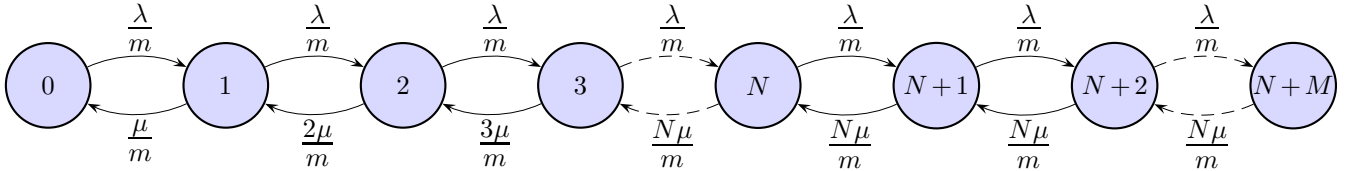
Aus  $\mathcal{A} \cdot \vec{p} = \vec{p}$  ist nach kurzer Rechnung zu erkennen, dass alle Zustände auf lange Sicht gleich oft angenommen werden. Dies kann unmittelbar bestätigt werden, da auch die Zeilensummen von  $\mathcal{A}$  1 sind ( $\mathcal{A}$  ist doppeltstochastisch).

Dann gilt:

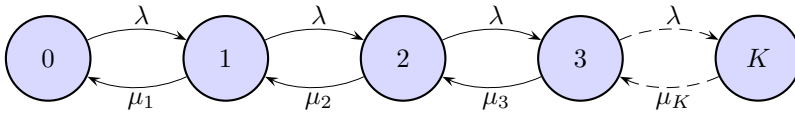
$$L_{\text{Anzahl der Personen im System}} = \frac{1}{M+1} (1 + 2 + \dots + M) = \frac{1}{M+1} \cdot \frac{M(M+1)}{2} = \frac{M}{2}$$

# N Schalter

Nehmen wir jetzt an, dass  $N$  Schalter vorhanden sind und die (einzige) Warteschlange maximal  $M$  Kunden fasst. Im Zustand  $n$  mit  $n \leq N$  werden  $n$  Kunden gleichzeitig bedient, der Erwartungswert ist dann  $n\mu$ .



Etwas vereinfacht und verallgemeinert:



Für die stationäre Verteilung  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_K$  erhalten wir mit den Gleichgewichtsbeziehungen:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot p_0 \\
 p_2 &= \frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} \cdot p_0 \\
 p_3 &= \frac{\lambda^3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \cdot p_0 \quad \text{d. h.} \quad p_n = p_{n-1} \cdot \frac{\lambda}{\mu_n}, \quad n \geq 1 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$p_0$  folgt aus der Normierungsbedingung  $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_K = 1$ .

Nun sind wir in der Lage, die stationäre Verteilung für das  $N$ -Schalter-Problem anzugeben, sowie die mittlere Schlangenlänge  $S = 1 \cdot p_{N+1} + 2 \cdot p_{N+2} + \dots + M \cdot p_{N+M}$  zu ermitteln. Für begrenzte Systeme ist  $\lambda \geq \mu$  möglich.

Im Zustand  $N + M$  kann das System keine weiteren Kunden aufnehmen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt:

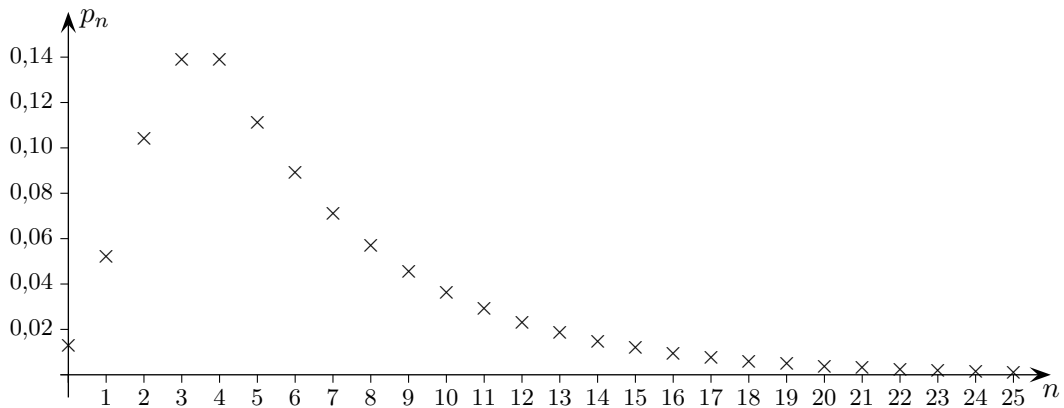
$$p_{N+M} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+M} \cdot \frac{p_0}{N! N^M}$$

Pro Zeiteinheit gehen also durchschnittlich  $p_{N+M} \cdot \lambda$  Kunden verloren.

# Warteschlangen $N$ -Schalter-Beispiel

$N = 5$   
 $M = 20$   
 $\lambda = 80$  (pro Zeiteinheit)  
 $\mu = 20$

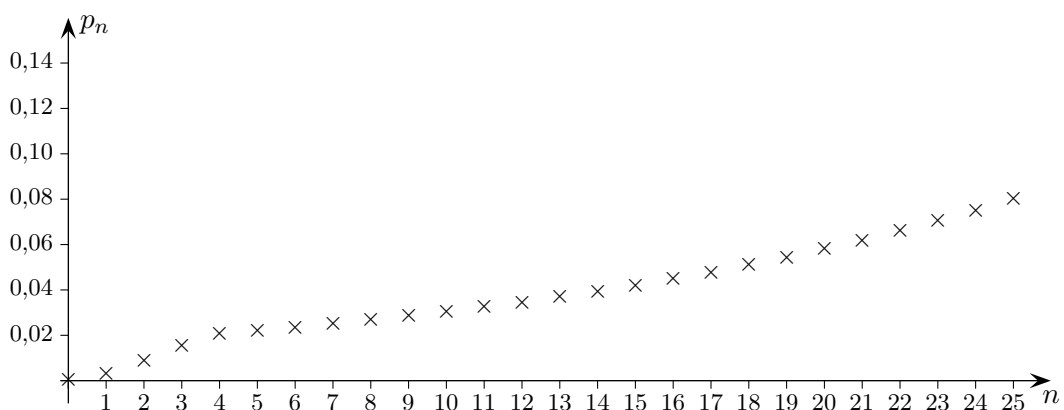
stationäre Verteilung



mittlere Warteschlangenlänge 2,1  
mittlere Wartezeit in der Warteschlange 0,021

Variation  $\mu = 15$

stationäre Verteilung



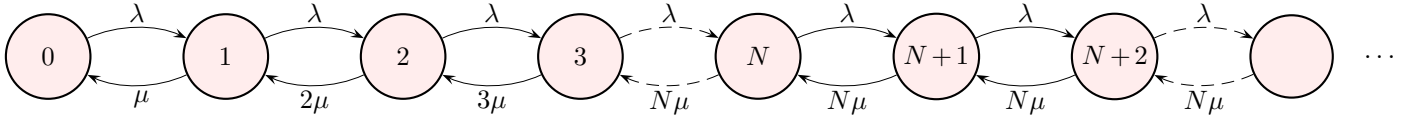
mittlere Warteschlangenlänge 11,7  
mittlere Wartezeit in der Warteschlange 0,156  
6,4 Kunden gehen pro Zeiteinheit verloren.

---

*Roolfs*

---

## N Schalter, Warteschlange nicht begrenzt



Die stationäre Verteilung  $p_0, p_1, p_2, \dots$  lautet:

$$\begin{aligned}
 p_0 & \\
 p_1 &= p_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu} \\
 p_2 &= p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\
 p_3 &= p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \\
 &\dots \\
 p_N &= p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \cdot \frac{1}{N!} \\
 \hline
 p_{N+1} &= p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} \cdot \frac{1}{N!N} \\
 p_{N+2} &= p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+2} \cdot \frac{1}{N!N^2} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$p_0$  folgt aus der Normierungsbedingung  $p_0 + p_1 + p_2 + \dots = 1$ .

$$p_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \cdot \frac{1}{N!} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{N^n}}_{\left(\frac{\lambda}{\mu N}\right)^n} \right] = 1$$

Die unendliche geometrische Reihe konvergiert für  $\lambda < \mu N$  gegen  $\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{N - \frac{\lambda}{\mu}}$ .

Die mittlere Schlangenlänge beträgt dann:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_{N+n} = p_N \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{N^n}}_{\left(\frac{\lambda}{\mu N}\right)^n} = p_N \cdot \frac{\frac{\lambda}{\mu N}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu N}\right)^2} \quad (\text{siehe Formel Seite 2})$$

Die mittlere Verweilzeit in der Schlange soll noch ermittelt werden. Ein Kunde findet ein System im Zustand  $k$  vor .... Beachte, dass die Schlange auch leer sein kann und alle Schalter besetzt.

$$W = \frac{1}{\mu N} \cdot p_N + \frac{2}{\mu N} \cdot p_{N+1} + \frac{3}{\mu N} \cdot p_{N+2} + \dots$$

## $N$ Schalter, Verweilzeit in der Warteschlange

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\mu N} \cdot p_N + \frac{2}{\mu N} \cdot p_{N+1} + \frac{3}{\mu N} \cdot p_{N+2} + \dots \\ &= \frac{p_N}{\mu N} \left[ \underbrace{1 + 2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu N}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu N}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu N}\right)^3 + \dots}_{\frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu N}\right)^2}} \right] \end{aligned}$$

Es wird die Formel

$$\sum_{n \geq 0} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad 0 < |q| < 1$$

verwendet.

Offensichtlich gilt auch hier  $L = \lambda W$  (Satz von Little).