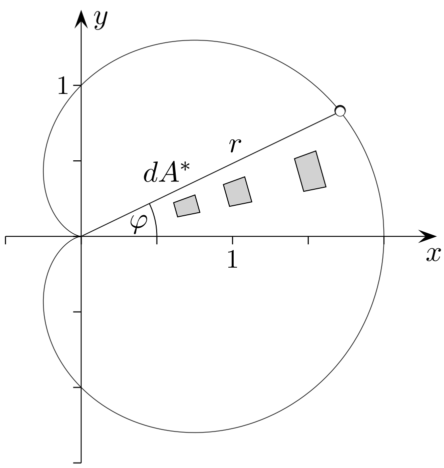
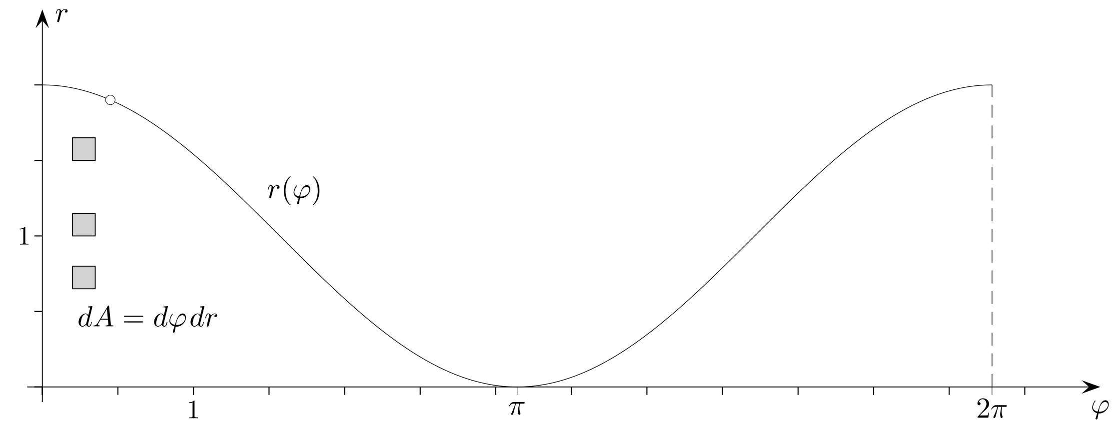
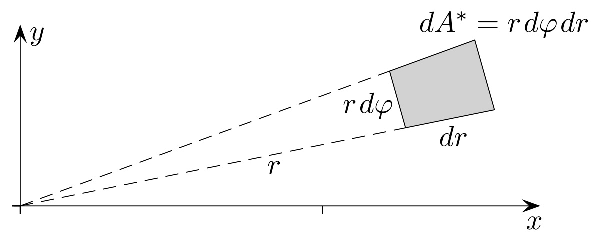
# Kurven in Polarkoordinaten Flächenberechnung




Um den Flächeninhalt der Kardioide $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$, zu berechnen, stellen wir deren Polarkoordinaten $(\varphi, r)$ im $\varphi r$-Koordinatensystem dar.
Jedem Flächenelement $dA$ unter dem Graphen $r(\varphi)$ entspricht dann in eineindeutiger Weise einem Flächenelement $dA^*$ in der Kardioide, das um das $r$-fache vergrößert bzw. verkleinert ist.




Addition der mit $r$ multiplizierten Flächenelemente unter dem Graphen $r(\varphi)$ und Grenzwertbildung führt daher einerseits zum Flächeninhalt der Kardioide, andererseits zum Doppelintegral:

$$\int_0^{2\varphi} \int_0^{r(\varphi)} r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\varphi} \frac{1}{2} \big[\, r(\varphi) \big]^2\, d\varphi$$

Für die Kardioide ergibt sich der Flächeninhalt $\frac{3}{2}\,\pi$.

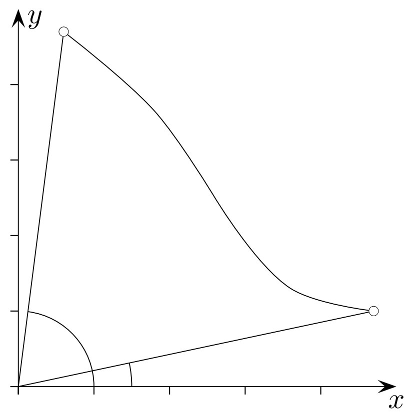
Dieses dargestellte Vorgehen ist auch typisch bei der Verwendung von Zylinder- und Kugelkoordinaten.

$\mathcal{R}$oolfs

# Polarkoordinaten Ergänzungen

Nebenbei haben wir die Leibnizsche Sektorenformel erhalten,
$\varphi$ variiert hier zwischen $\alpha$ und $\beta$.

$$A_{\text{Sektor}} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \left[ r(\varphi) \right]^2 d\varphi$$




Volumen werden, falls Polarkoordinaten vorliegen, naheliegend mit

$$\int_0^{2\varphi} \int_0^{r(\varphi)} f(r, \varphi)\; r\, dr\, d\varphi$$

berechnet,
wobei die Integrationsgrenzen noch angepasst werden können.

Der Übergang von einem Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

$$\iint_B f(x, y)\; dx\, dy$$

zu Polarkoordinaten erfolgt mit

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

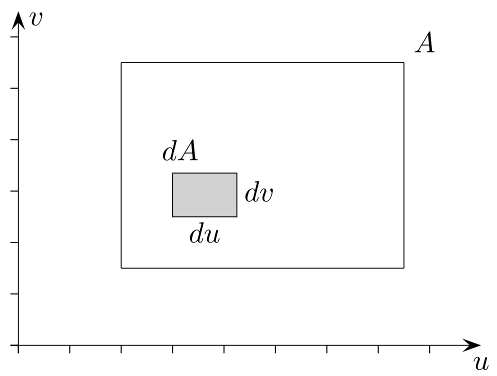
$$\iint_B f(x, y)\; dx\, dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_a(\varphi)}^{r_b(\varphi)} \underbrace{f(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)}_{\text{Funktion mit den Variablen } r \text{ und } \varphi}\; r\, dr\, d\varphi$$

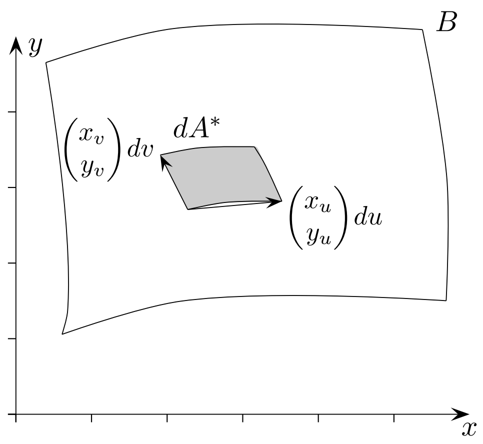
# Krummlinige Koordinaten

Eine umkehrbare Funktion ist für einen Bereich im $uv$-Koordinatensystem gegeben durch

$$(u, v) \longrightarrow \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

Falls eine Variable konstant bleibt, erhalten wir eine Kurve.




Es gilt:

$$dA = du\,dv$$

$$dA^* = \left| \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right| \, du\,dv$$

Parallelogrammfläche, Betrag der Determinante,
siehe Determinanten, ...

$$= |x_u y_v - x_v y_u| \; du\,dv$$

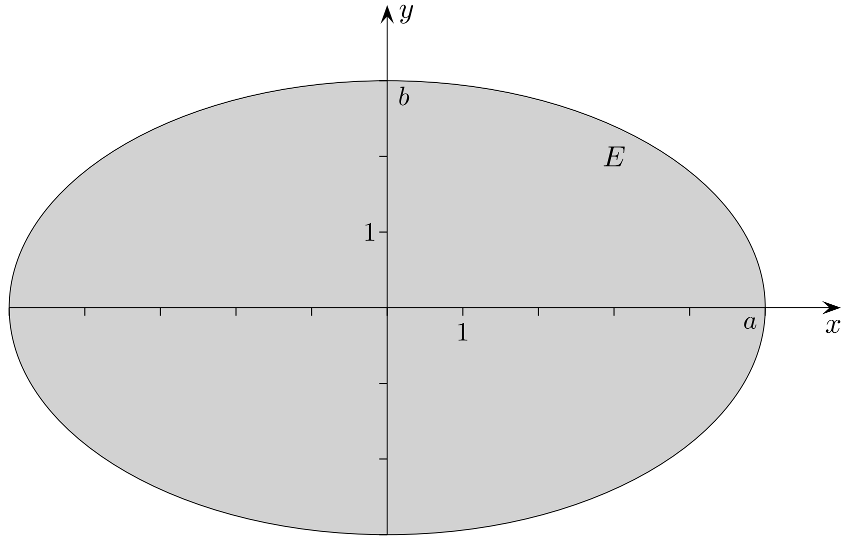
Die beiden nächsten Formeln sollten nun verständlich sein.

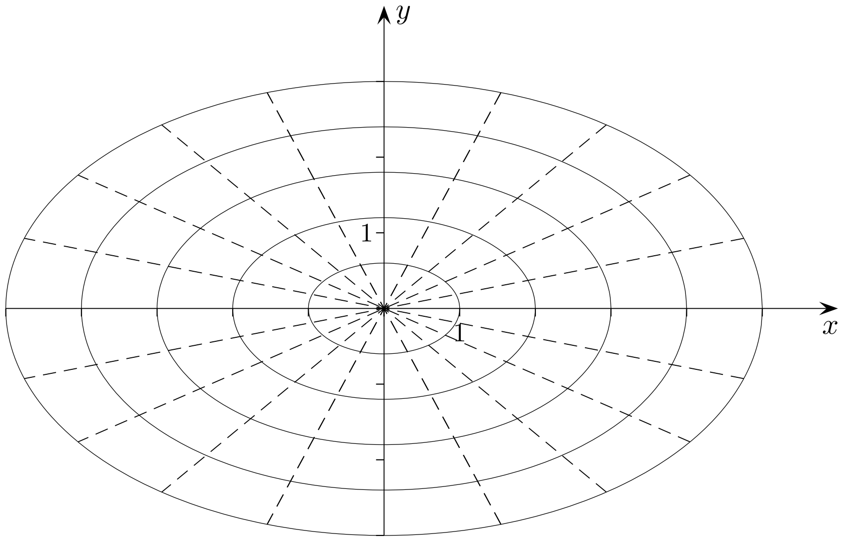
$$\int\!\!\int_B dx\,dy = \int\!\!\int_A |x_u y_v - x_v y_u| \; du\,dv$$

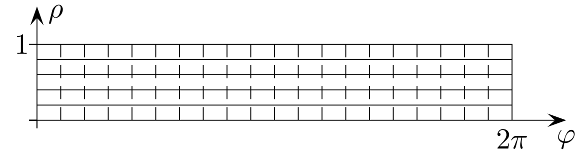
$$\int\!\!\int_B f(x,y) \; dx\,dy = \int\!\!\int_A f(x(u,v), y(u,v)) \; |x_u y_v - x_v y_u| \; du\,dv$$

# Krummlinige Koordinaten  Flächeninhalt der Ellipse

Ellipsengleichung: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$




Variablenwechsel:

$x = a\,\rho\cos\varphi$

$y = b\,\rho\sin\varphi$

$|\,x_\varphi y_\rho - x_\rho y_\varphi| = ab\rho$

$$\iint\limits_E dx\,dy = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho = \pi ab$$