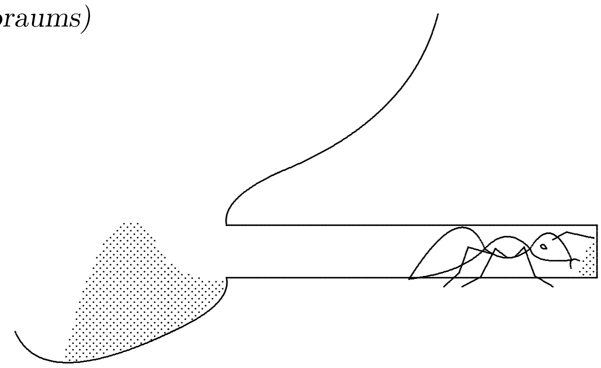
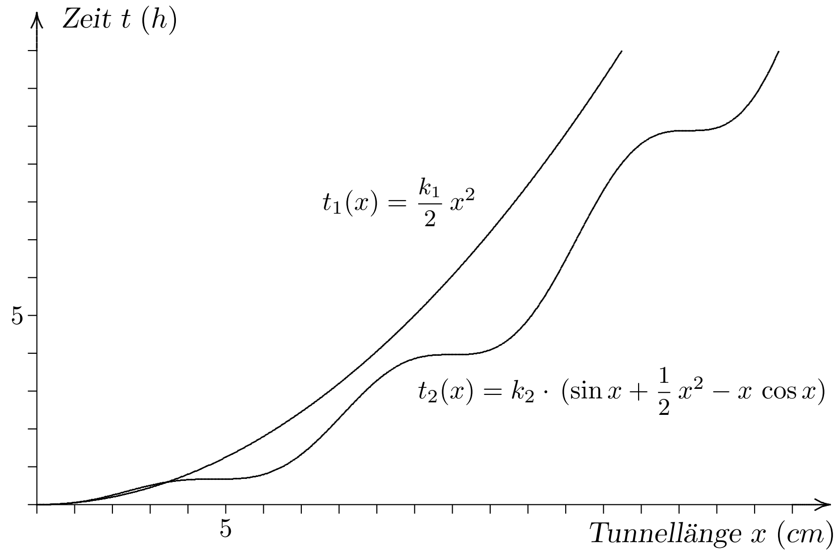
Tunnelbau

Eine Ameise bohrt einen Tunnel (alternativ: Ein Gabelstapler räumt ein langgestrecktes Lager). Wir ermitteln die benötigte Zeit t in Abhängigkeit von der Länge x des gegrabenen Tunnels und nehmen an:

$$\begin{aligned} & \Delta t && \sim && x && \qquad \textit{(Abtransport des Abraums)} \\ & \Delta t && \sim && \Delta x \\ \Longrightarrow \quad & \Delta t && = && k \cdot x \cdot \Delta x \\ & \frac{\Delta t}{\Delta x} && = && k \cdot x \\ & \frac{dt}{dx} && = && k \cdot x \\ & t(x) && = && \frac{k}{2} \cdot x^2 \end{aligned}$$



Die Umkehrfunktion $x(t)$ (Tunnellänge in Abhängigkeit von der Zeit) löst die DGL $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k \cdot x}$ (x ist die Funktion $x(t)$, man beachte das Rechnen mit Differentialen).



$k_1 = \frac{1}{10}$

$k_2 = \frac{1}{15}$

Die Problemstellung kann variiert werden, so dass k wegen schwankender Bodenbeschaffenheit von der Tunnellänge x abhängt. Statt k wählen wir z. B. $k \cdot \, (\sin x + 1)$ und erhalten:

$$\frac{dt}{dx} = k \cdot x \cdot \, (\sin x + 1) \qquad \text{und mit partieller Integration } t(x) \text{, siehe Grafik.}$$

Für die Umkehrfunktion $x(t)$ können wir keinen Funktionsterm angeben, jedoch eine DGL

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k \cdot x \cdot \, (\sin x + 1)} \qquad \text{mit der Lösung } x(t)\,.$$

Eine iterative Näherung für $x(t)$ gelingt z. B. mit $\Delta x = 0{,}001$, $x_0 = 0{,}1$ und $n = 12000$ (Excel).