Transformationsformel

Zur Illustration der Handhabung wird die Funktion $f(x,y) = x + y$ auf dem Bereich B betrachtet, der durch zwei geradlinig verbundene Parabelsegmente begrenzt wird. Es soll das Volumen

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

ermittelt werden.

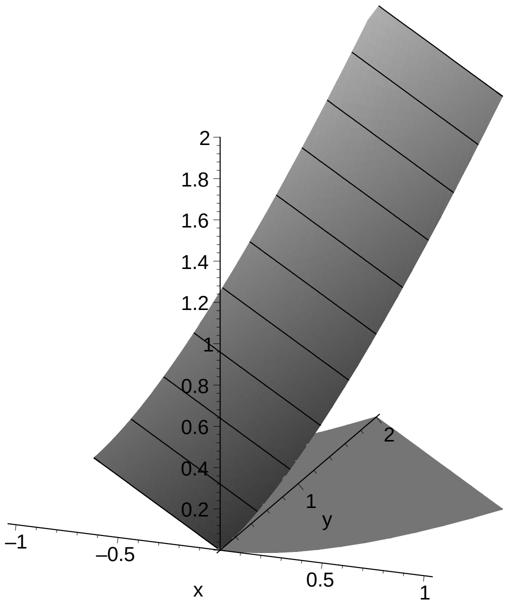
(Der Graph der Funktion f ist eben, auch wenn dies durch den krummlinig begrenzten Bereich B anders erscheint.)

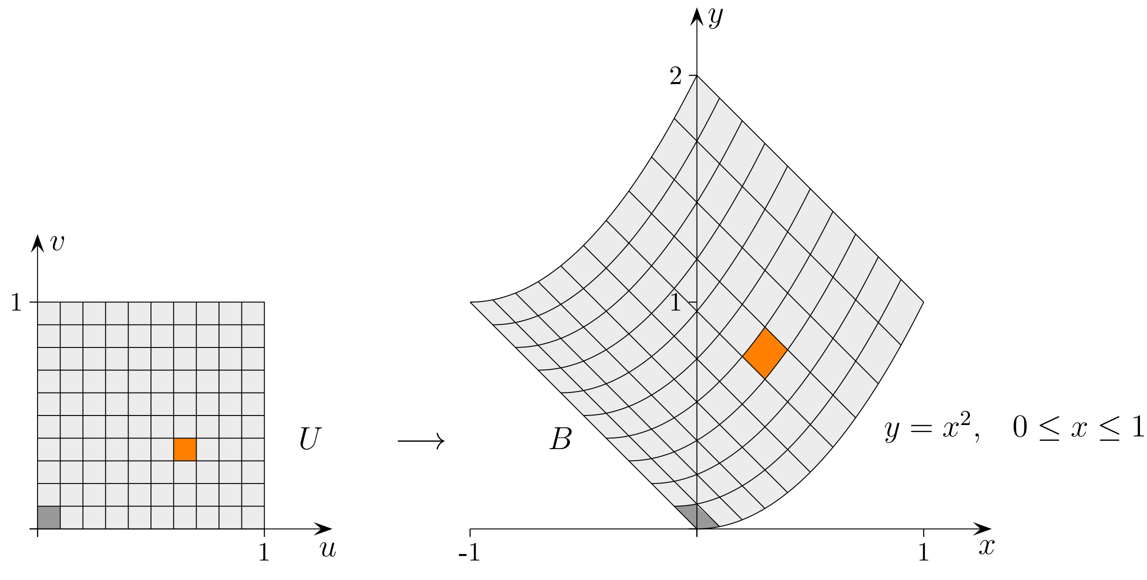
U kann bijektiv auf B abgebildet werden, so dass eine Integration über U erfolgen kann. Beachte hierzu:

$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le u \le 1$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v \\ u^2 + v \end{pmatrix}, \quad 0 \le u, v \le 1$$

Durch den 2. Summanden werden die Parabelsegmente längs des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kontinuierlich verschoben.





Zwischen den Flächenelementen besteht die Beziehung:

$$dB = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} dU = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{vmatrix} dU = (2u+1)\,du\,dv$$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_U \big[(u-v)+(u^2+v)\big]\,(2u+1)\,du\,dv = \int_0^1\!\int_0^1 (u+u^2)(2u+1)\,du\,dv = \ldots = 2$$