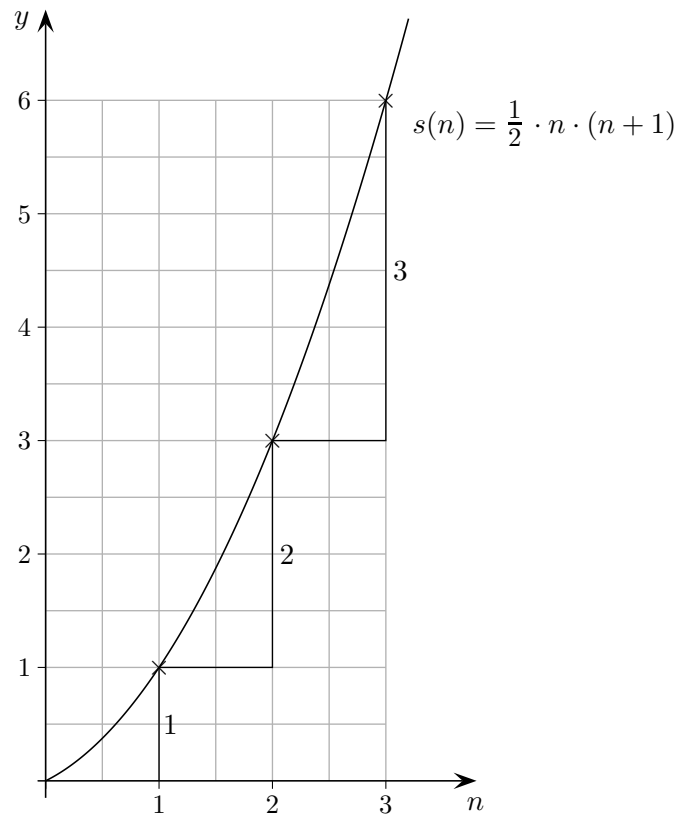


Summe der Quadratzahlen

Als Vorübung ermitteln wir eine Summenformel für

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$



Ansatz $s(n) = an^2 + bn$

Bedingungen:

1. $s(1) = 1$
2. $s(2) = 3$

1. $a + b = 1$
2. $4a + 2b = 3$

Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$

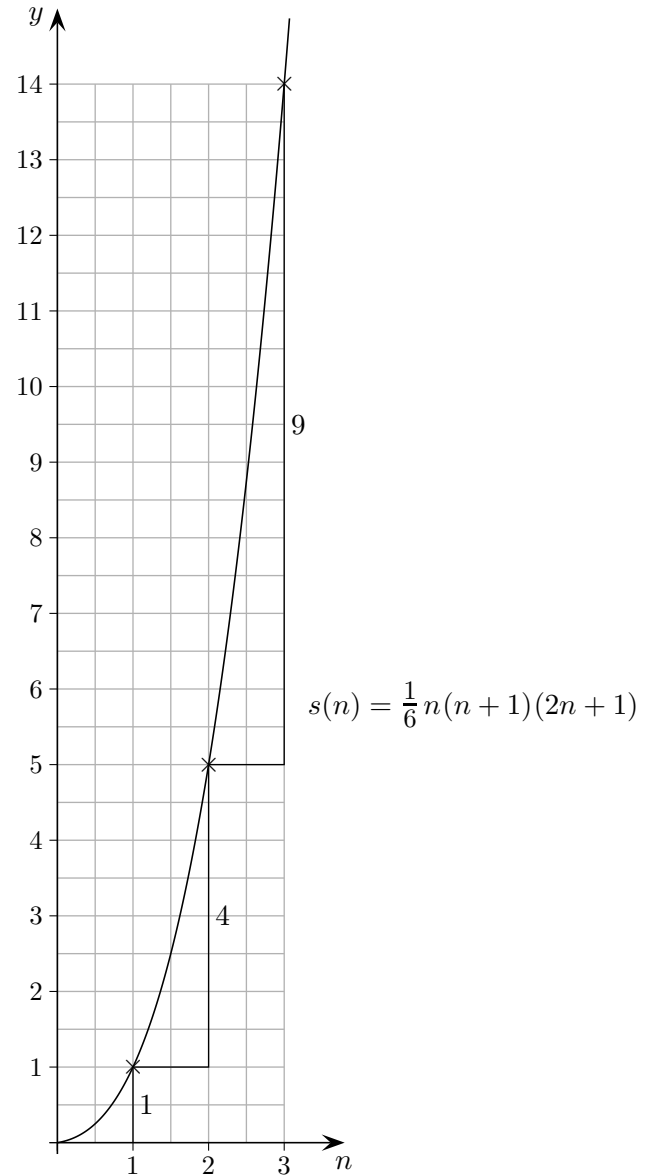
Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n - 1) = \dots = n$ erbracht ($\frac{1}{2}n$ ausklammern).

Roofls

Summe der Quadratzahlen

$$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$



Ansatz $s(n) = an^3 + bn^2 + cn$

Bedingungen:

1. $s(1) = 1$
2. $s(2) = 5$
3. $s(3) = 14$

1. $a + b + c = 1$
2. $8a + 4b + 2c = 5$
3. $27a + 9b + 3c = 14$

Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n-1) = \dots = n^2$ erbracht ($\frac{1}{6}n$ ausklammern).

Roolfs

Summe der Quadratzahlen alternativ

$$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Ansatz $s(n) = an^3 + bn^2 + cn$

Die Koeffizienten sind so zu wählen, dass gilt:

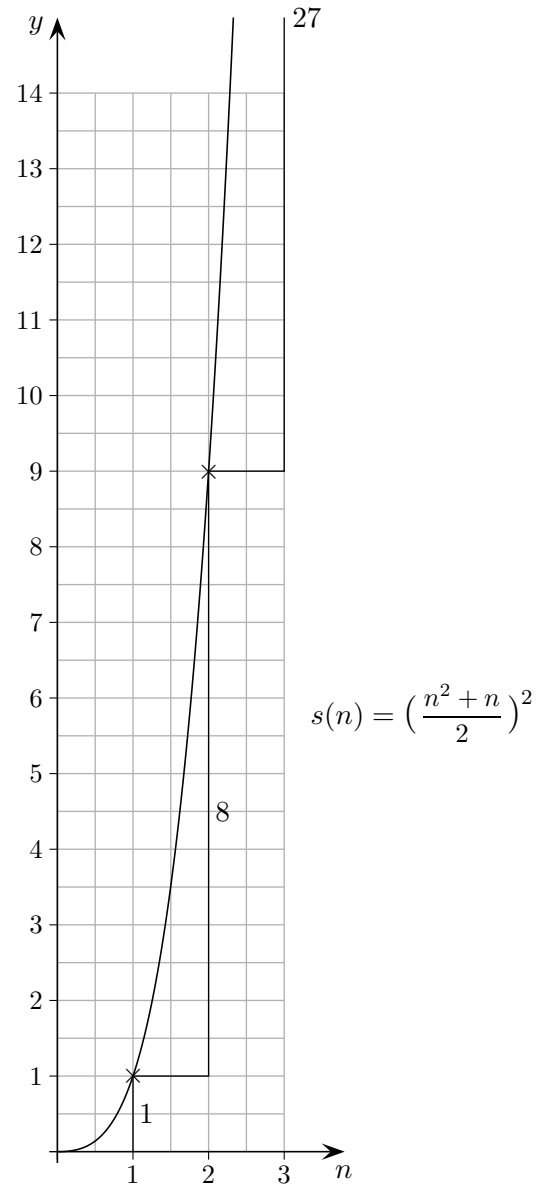
$$\begin{aligned} s(n) - s(n-1) &= n^2 \\ \iff 3an^2 + (2b - 3a)n + a - b + c &= n^2 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich erbringt mit $s(1) = 1$ die Lösung .

Die Summenformel lautet somit: $s(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Summe der Kubikzahlen

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$



Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$

Bedingungen:

1. $s(1) = 1$
2. $s(2) = 9$
3. $s(3) = 36$
4. $s(4) = 100$

1. $a + b + c + d = 1$
2. $16a + 8b + 4c + 2d = 9$
3. $81a + 27b + 9c + 3d = 36$
4. $256a + 64b + 16c + 4d = 100$

Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n - 1) = \dots = n^3$ erbracht.

Roofls

Summe der Kubikzahlen alternativ

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$

Die Koeffizienten sind so zu wählen, dass gilt:

$$\begin{aligned} s(n) - s(n-1) &= n^3 \\ \iff 4an^3 + (3b-6a)n^2 + (4a-3b+2c)n - a + b - c + d &= n^3 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich erbringt mit $s(1) = 1$ die Lösung.

Die Summenformel lautet somit: $s(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$