Kubische Splines

Früher wurde eine glatte Kurve durch vorgegebene Punkte mit einem biegsamen Lineal (engl. spline) gezeichnet. Eine dünne Holzlatte kann durch Fixierung an einzelnen Stellen verbogen werden (Schiffsbau), die Holzlatte minimiert dann durch ihre Form die Gesamtkrümmung.
Seien (zunächst) drei Punkte gegeben. Eine solche Kurve kann dadurch erhalten werden, dass jeweils auf dem rechten und linken Intervall zwei ganzrationale Funktionen bestimmt werden, die bestimmten Bedingungen genügen. Erläutere diese.

$P(x_1 \mid y_1)$
$P(x_2 \mid y_2)$
$P(x_3 \mid y_3)$

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad [x_1, x_2] \\ g(x) &= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \qquad [x_2, x_3] \end{aligned}$$

1. $f(x_1) = y_1$
2. $f''(x_1) = 0$
3. $f(x_2) = y_2$
4. $g(x_2) = y_2$
5. $f'(x_2) = g'(x_2)$
6. $f''(x_2) = g''(x_2)$
7. $g(x_3) = y_3$
8. $g''(x_3) = 0$

Für jeden weiteren Punkt ist eine Teilfunktion mit vier Bedingungen entsprechend 3. - 6. hinzuzufügen.

Beispiel
$A(0 \mid 2)$
$B(4 \mid 1)$
$C(10 \mid 8)$

Kubische Splines

$$\begin{aligned}
&1. & a_0 &= 2\\
&2. & 2a_2 &= 0\\
&3. & 64a_3+16a_2+4a_1+a_0 &= 1\\
&4. & 64b_3+16b_2+4b_1+b_0 &= 1\\
&5. & 48a_3+8a_2+a_1 &= 48b_3+8b_2+b_1\\
&6. & 24a_3+2a_2 &= 24b_3+2b_2\\
&7. & 1000b_3+100b_2+10b_1+b_0 &= 8\\
&8. & 60b_3+2b_2 &= 0
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{17}{960}x^3 - \frac{8}{15}x + 2 \qquad [0,4]$$

$$g(x) = -\frac{17}{1440}x^3 + \frac{17}{48}x^2 - \frac{39}{20}x + \frac{35}{9} \qquad [4,10]$$