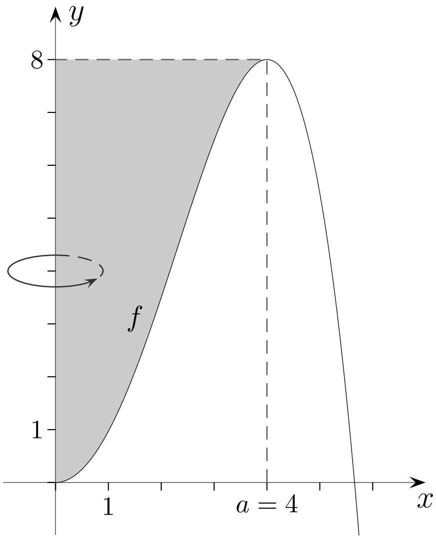
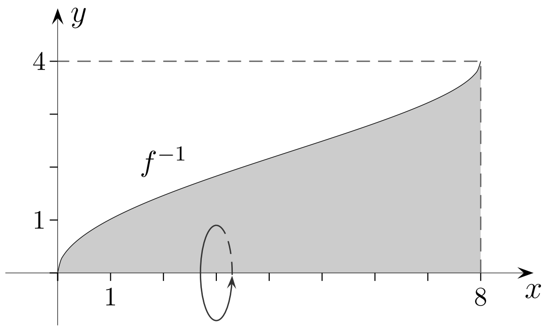
Volumen bei Rotation um die y-Achse

Betrachten wir die Funktion $f(x) = -\frac{1}{32}x^4 + x^2$ auf dem Intervall von 0 bis 4, der Stelle des Maximums und lassen das gepunktete Flächenstück um die y-Achse rotieren. Um das Rotationsvolumen V_y zu berechnen, führen wir das Problem auf Bekanntes zurück und bestimmen für die Umkehrfunktion

$f^{-1}(x) = 2\sqrt{4 - \sqrt{16 - 2x}}$ das Volumen bei Rotation um die x-Achse:

$$V_y = \pi \int_0^8 (f^{-1}(x))^2 \, dx = \frac{128}{3}\pi$$





Die bei dieser Rechnung auftretenden Schwierigkeiten sind vermeidbar.

Hierzu bringen wir das Integral

$$V_y = \pi \int_{x_1}^{x_2} (f^{-1}(x))^2 \, dx$$

durch die Substitution $x = f(u)$ auf die Form:

$$V_y = \pi \int_{f^{-1}(x_1)}^{f^{-1}(x_2)} x^2 \cdot f'(x) \, dx$$

Unser Problem geht dann über in $(x_1 = 0,\ x_2 = 8)$: $\quad V_y = \pi \int_0^4 x^2 \cdot f'(x) \, dx = \frac{128}{3}\pi$

Um die Formel

$$V_y = \pi \int_0^a x^2 \cdot f'(x) \, dx$$

anwenden zu können, ist es erforderlich, dass die Umkehrfunktion existiert, auch wenn ihr Funktionsterm nicht ermittelt werden muss.

Roolfs

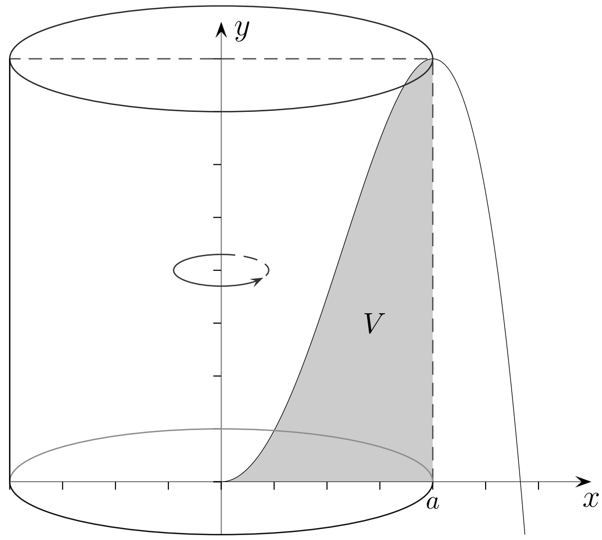
Schalenmethode

Unerwartet aufschlussreich ist es, das Integral

$$V_y = \pi \int_0^a x^2 \cdot f'(x)\,dx$$ partiell auszuwerten.

$$V_y = \pi \Big[x^2 \cdot f(x) \Big]_0^a - \pi \int_0^a 2x \cdot f(x)\,dx$$

$$V_y = \underbrace{\pi a^2 f(a)}_{\text{Zylindervolumen}} - \underbrace{2\pi \int_0^a x \cdot f(x)\,dx}_{\text{Volumen } V}$$



Da die Differenz V_y ergibt, muss V dasjenige Volumen sein, dass bei Rotation des gepunkteten Flächenstücks um die y-Achse entsteht. Auch auf diese Weise ist natürlich das schon bekannte Ergebnis für V_y zu erhalten.

Für die Anwendung der Volumenformel

$$V = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x)\,dx$$

(sogenannte Schalenmethode) ist die Monotonie der Funktion und damit die Existenz der Umkehrfunktion nicht mehr erforderlich.
Diese Formel kann auch direkt bewiesen werden.
Das gezeichnete Rechteck mit dem Inhalt $A = f(x) \cdot \Delta x$ erzeugt bei der Rotation um die y-Achse einen Hohlzylinder (zylindrische Schale) mit dem näherungsweisen Volumen

$$\Delta V = f(x) \cdot \Delta x \cdot 2\pi x$$

Weiterer Erläuterungen bedarf es hier nicht.