

# Numerische Integration

$$y' = f(x)$$

Eine Stammfunktion von  $f$  mit  $y(x_0) = y_0$  soll iterativ ermittelt werden.

Je nachdem, wie genau die Fläche unter dem Graphen approximiert wird, ergeben sich verschiedene Verfahren.

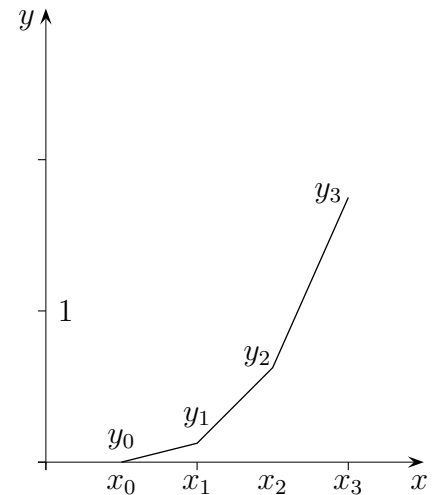
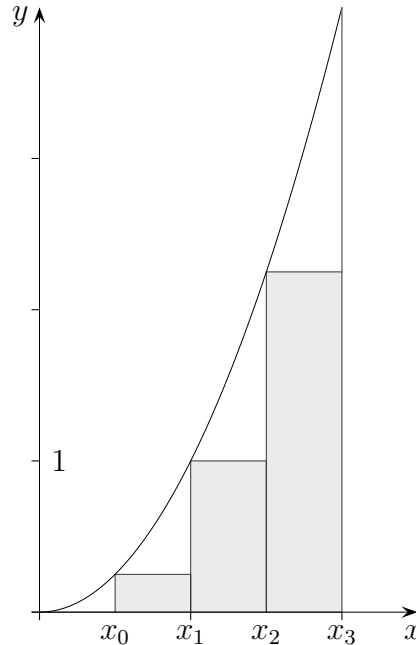
## 1. Eulersches Rechteckverfahren (1707-1783)

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta_n$$

$$\text{mit } \Delta_n = f(x_n) \cdot h$$

Aus der Sicht der Lösungsfunktion ist es ein Tangentenverfahren.



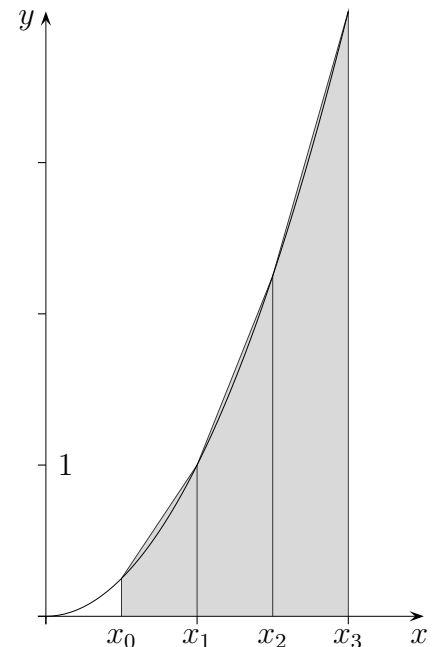
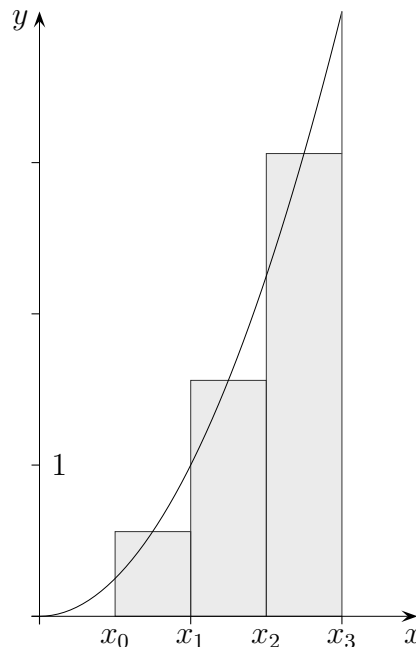
## 2. Halbschrittverfahren

$$\Delta_n = f(x_{\text{Mitte}}) \cdot h$$

$$\text{mit } x_{\text{Mitte}} = x_n + \frac{h}{2}$$

## 3. Trapezverfahren

$$\Delta_n = \frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{2} \cdot h$$



## 4. nach Simpson (1710-1761)

Der Graf wird durch eine Parabel approximiert.

Dieser Ansatz ist schon in der Keplerschen Fassregel (1571-1630) enthalten.

Bemerkenswert ist, dass mit  $\Delta_n$  ganzrationale Funktionen 3. Grades exakt integriert werden können.

$$\Delta_n = \frac{f(x_n) + 4f(x_{\text{Mitte}}) + f(x_{n+1}))}{6} \cdot h$$

# Numerische Integration einer Differentialgleichung

$$y' = f(x, y), \text{ genauer } y'(x) = f(x, y(x))$$

Eine Lösungsfunktion mit  $y(x_0) = y_0$  (Anfangswertproblem) soll iterativ ermittelt werden. Da die rechte Seite  $f(x, y(x))$  der DGL eine Funktion von  $x$  ist, falls  $y(x)$  eine konkrete Funktion ist, z. B. die Lösungsfunktion, kann das Vorige hier als Grundlage dienen.

## 1. Eulersches Rechteckverfahren

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta_n$$

$$\text{mit } \Delta_n = f(x_n, y_n) \cdot h$$

## 2. Halbschrittverfahren

$$\Delta_n = f(x_{\text{Mitte}}, y(x_{\text{Mitte}})) \cdot h$$

$$x_{\text{Mitte}} = x_n + \frac{h}{2}$$

$$y(x_{\text{Mitte}}) \text{ kann mit Euler genähert werden: } y(x_{\text{Mitte}}) = y_n + f(x_n, y_n) \cdot \frac{h}{2}$$

## 3. Trapezverfahren

$$\Delta_n = \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2} \cdot h$$

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$$

## 4. nach Simpson

$$\Delta_n = \frac{f(x_n, y_n) + 4f(x_{\text{Mitte}}, y(x_{\text{Mitte}})) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{6} \cdot h$$

$y(x_{\text{Mitte}})$  und  $y_{n+1}$  werden wie im Trapez- und Halbschrittverfahren bestimmt.

## Runge-Kutta-Verfahren (1895)

Das Simpson-Verfahren wird so geändert, dass sich durch Verquickung ein besseres  $\Delta_n$  ergibt.

$$\Delta_n = \frac{1}{6} [f(x_n, y_n) + 2f(x_{\text{Mitte}}, y(x_{\text{Mitte}})) + 2f(x_{\text{Mitte}}, y(x_{\text{Mitte}})) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \cdot h$$

$$\Delta_n^* = \frac{1}{6} \left[ \underbrace{f(x_n, y_n)}_{m_1} + 2 \underbrace{f(x_{\text{Mitte}}, y^*(x_{\text{Mitte}}))}_{m_2} + 2 \underbrace{f(x_{\text{Mitte}}, y^{**}(x_{\text{Mitte}}))}_{m_3} + \underbrace{f(x_{n+1}, y_{n+1})}_{m_4} \right] \cdot h$$

$$y^*(x_{\text{Mitte}}) = y_n + m_1 \cdot \frac{h}{2}$$

$$y^{**}(x_{\text{Mitte}}) = y_n + m_2 \cdot \frac{h}{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + m_3 \cdot h$$