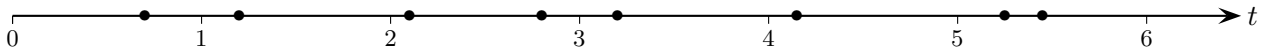


# Poisson-Prozess

Punktförmige Signale werden in zufälliger Aufeinanderfolge ausgesendet.  
Wir wollen diese Punktverteilungen auf der Zeitachse untersuchen.



Das Intervall  $I = [0 | t]$  teilen wir in  $n$  gleiche Teile und wählen  $n$  so groß, dass jeder Abschnitt höchstens einen Punkt enthält. Wir nehmen an, dass pro Zeiteinheit im Schnitt  $\lambda$  Signale gesendet werden. Der Erwartungswert für  $I$  beträgt daher  $\mu = \lambda \cdot t$  Punkte. Pro Abschnitt wird mit der Wahrscheinlichkeit  $p = \frac{\lambda \cdot t}{n}$  ein Signal gesendet. Der Prozess ist zeitinvariant, also von der Lage von  $I$  unabhängig.

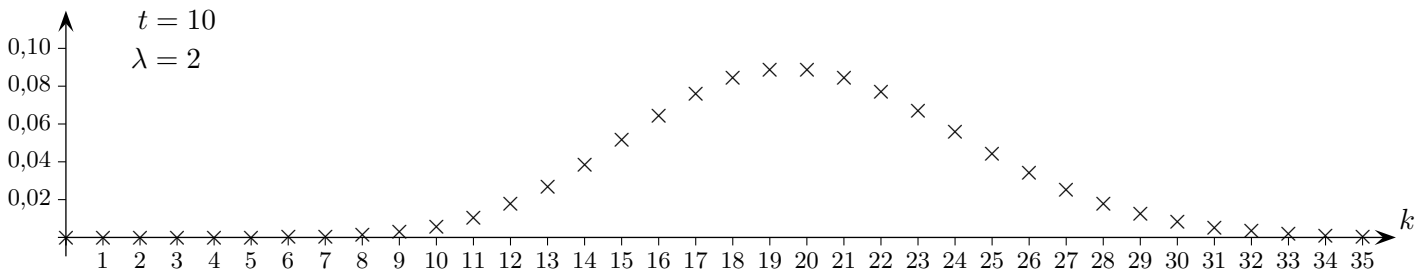
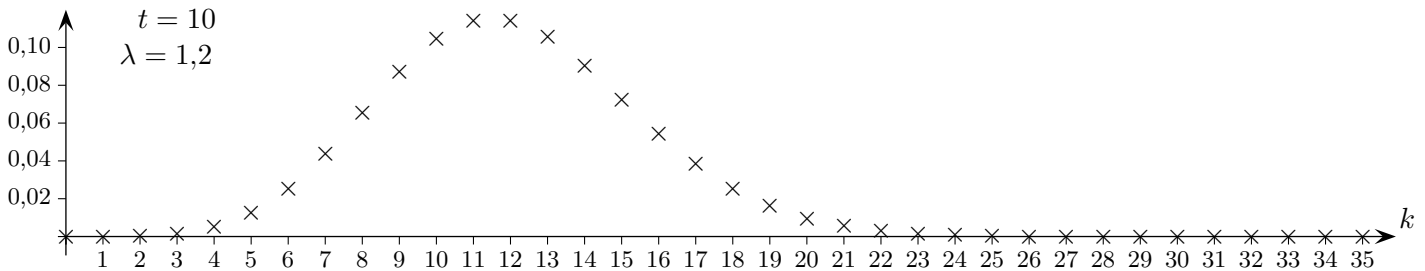
Für große  $n$  ( $n \geq 100$ ) und kleine  $p$  ( $p \leq 0,1$ ) fand Poisson eine überraschend gute Näherung für die Binomialverteilung (siehe Poisson-Verteilung). Dies führte zu der Definition:

*Eine Zufallsgröße  $X$  heißt poissonverteilt, falls die Wahrscheinlichkeiten für  $k = 0, 1, 2, \dots$  Treffer mit*

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \text{ berechnet werden, } \mu = n \cdot p.$$

Auf unsere Modellierung angewendet gilt dann:

$$P_t(X = k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$



Roofls

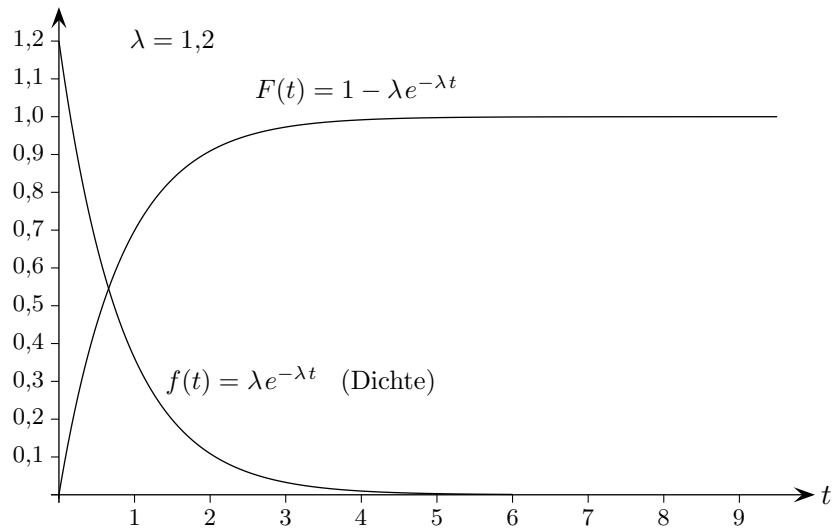
# Poisson-Prozess

Die Wahrscheinlichkeit für kein Signal in einem Intervall der Länge  $t$  beträgt

$$P_t(X = 0) = e^{-\lambda t}$$

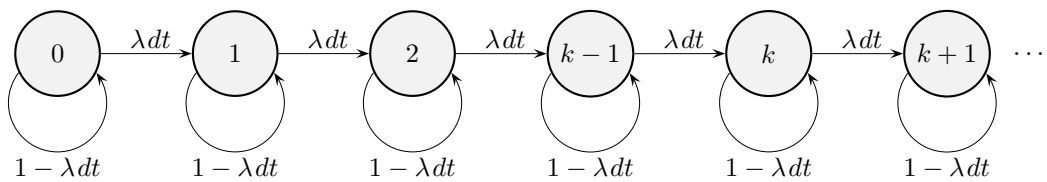
und für mindestens ein Signal

$$P_t(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad \text{Diese Wahrscheinlichkeiten sind Funktionen von } t.$$



Betrachten wir nun auch  $P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$  als Funktion von  $t$ ,  $k$  ist der Parameter.

Die Ableitung nach  $t$  ergibt  $P'_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t)$ ,  $k \geq 1$



$P'_k$  kann veranschaulicht werden.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Signal in der Zeit  $dt$  ist  $P_1(dt) = \lambda dt$ .

$$\begin{aligned} P_k(t + dt) &= P_k(t) \cdot P_0(dt) + P_{k-1}(t) \cdot P_1(dt) \\ &= P_k(t) \cdot (1 - \lambda dt) + P_{k-1}(t) \cdot \lambda dt \end{aligned}$$

$$P_k(t + dt) - P_k(t) = -P_k(t) \cdot \lambda dt + P_{k-1}(t) \cdot \lambda dt$$

$$P'_k(t) = P_{k-1}(t) \cdot \lambda - P_k(t) \cdot \lambda$$

Die Änderung  $dP_k$  besteht aus einem Zufluss  $P_{k-1}(t) \cdot \lambda dt$  von  $k - 1$  vermindert um einen Abfluss  $P_k(t) \cdot \lambda dt$  nach  $k + 1$ .

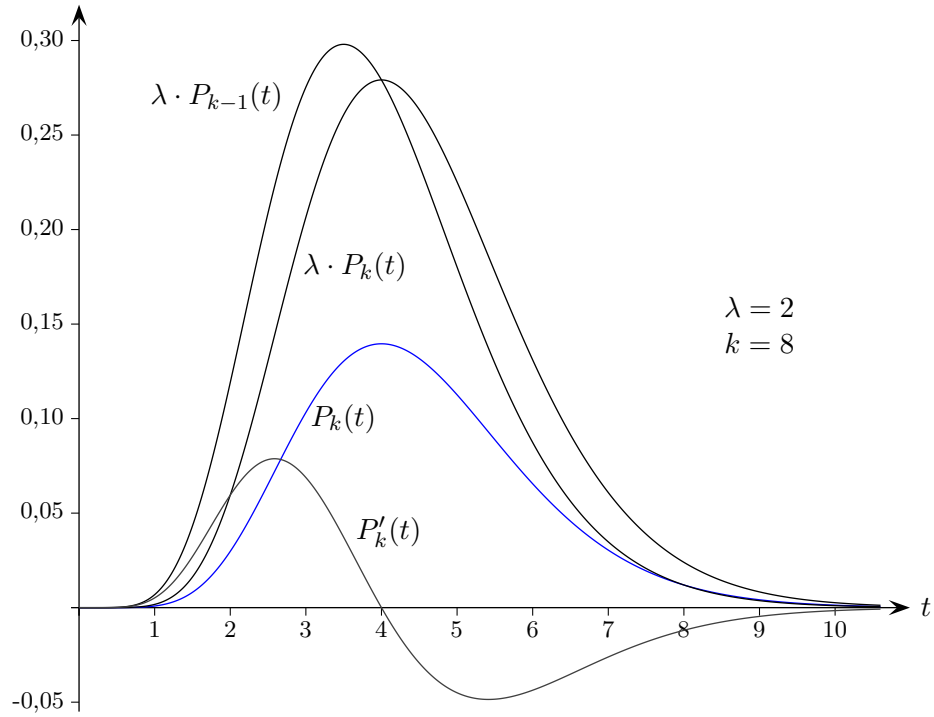
---

Roofls

# Poisson-Prozess

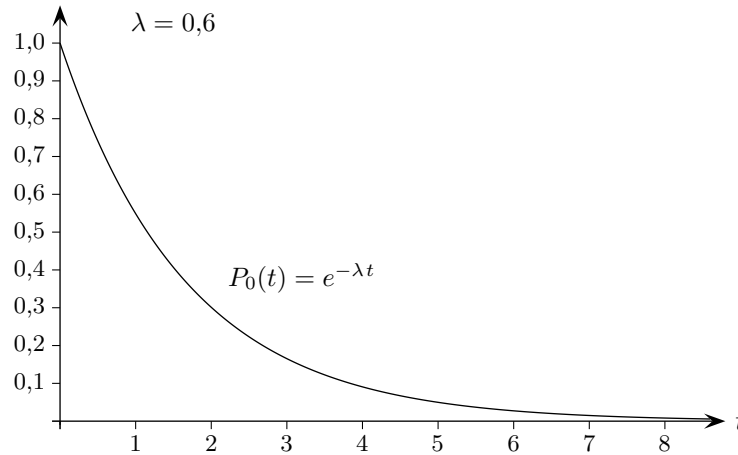
$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$P'_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t), \quad k \geq 1$$



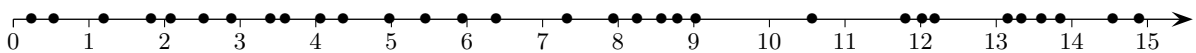
# Poisson-Prozess Simulation

Aus  $P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  folgt  $P_0(t) = e^{-\lambda \cdot t}$ .



$P_0(t)$  ( $t$  fest) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Intervall der Länge  $t$  ohne Signal ist. Sei  $T$  die Wartezeit bis zum ersten Signal.  $T$  ist eine stetige Zufallsvariable, sie gibt auch die Wartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Signalen an. Es gilt  $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ . Die Verteilungsfunktion von  $T$  lautet dann  $F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$  und besitzt die Dichte  $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .

$\lambda = 2$



Exponential verteilte Wartezeiten lassen sich überraschend leicht simulieren.

Die Wahrscheinlichkeiten für ein signalfreies Intervall der Länge  $t$  (siehe Graph von  $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ ) werden als gleichverteilt angenommen und die Längen der Wartezeiten mit der Umkehrfunktion von  $P_0(t)$  bestimmt.

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X \quad X \text{ sei gleichverteilt auf } [0, 1]$$

$$P(Y \leq t) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln X \leq t\right)$$

$$= P(X \geq e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{nach Voraussetzung über } X$$

$Y$  ist damit exponentialverteilt.

# Inhomogener Poisson-Prozess

Ein inhomogener Poisson-Prozess liegt dann vor, wenn  $\lambda$  von der Zeit abhängt, z.B.  $\lambda = 0,2t + 1$ .

