

Multivariate Normalverteilung

Die Dichtefunktion der gemeinsamen Verteilung für korrelierte normalverteilte Zufallsvariable ist nicht unmittelbar verständlich. Die Definition dieser multivariaten Normalverteilung als Ausgangspunkt für eine Bearbeitung zu nehmen, ist schlechter Stil, der auch bei vielen anderen Themen beobachtbar ist. Er verleitet zu dem Eindruck, Mathematik sei nur etwas für Eingeweihte.

Seien X und Y unabhängig und $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt.

Wir basteln uns zunächst zwei korrelierte Zufallsvariable:

$$\begin{aligned} X^* &= X \\ Y^* &= \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Y \end{aligned}$$

Für sie gilt:

$$\begin{aligned} V(X^*) &= V(Y^*) = 1 && \text{beachte } V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) \\ \text{Cov}(X^*, Y^*) &= \rho && \text{Cov}(X, aX + bY) = a\text{Cov}(X, X) + b\text{Cov}(X, Y) = aV(X) \end{aligned}$$

Die Kovarianz stimmt hier mit dem Korrelationskoeffizienten überein.

Um die gemeinsame Verteilung zu ermitteln, ist das Integral

$$P(X^* \leq x^*, Y^* \leq y^*) = \int_{\substack{x \leq x^* \\ \rho x + \sqrt{1 - \rho^2} y \leq y^*}} \int f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

auszuwerten.

Dies gelingt mit der Transformation (Umkehrabbildung) $(x, \frac{y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}) \longleftarrow (x, y)$

Allgemein gilt für eine Transformation (siehe Verschiedenes, krummlinige Koordinaten)

$$(u, v) \longrightarrow (x(u, v), y(u, v))$$

$$dA^* = \left| \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right| \, du \, dv \quad \text{und in diesem Fall} \quad \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dots & \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

$$P(X^* \leq x^*, Y^* \leq y^*) = \int_{-\infty}^{y^*} \int_{-\infty}^{x^*} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} f(x, \frac{y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}) \, dx \, dy \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

Einsetzen und leichte Umformungen führen zur gesuchten Dichte:

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)}$$

Multivariate Normalverteilung Fortsetzung

Die Matrixschreibweise der Dichte mit Hilfe der Kovarianzmatrix sollte nun auch einsichtig sein.

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x|y)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \quad *$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{|\Sigma|} = \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Die Höhenlinien von $g(x, y)$ sind Ellipsen (siehe Hauptachsentransformation) mit der Gleichung:

$$(x \mid y)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{const}$$

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 von Σ^{-1} lauten: $\frac{1}{1 + \rho}, \frac{1}{1 - \rho}$,

die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Halbachsen liegen auf den Winkelhalbierenden.

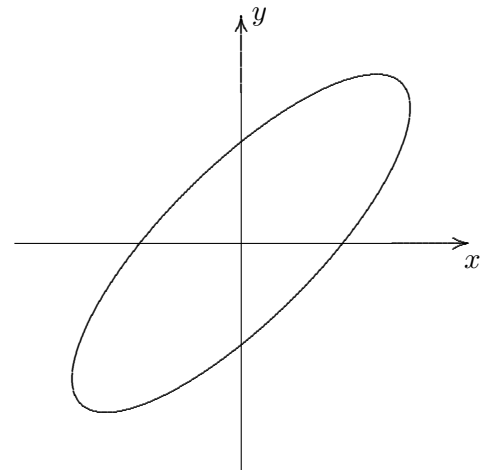
Für sie gilt:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$$

Hieraus ist ersichtlich:

Je größer ρ , umso schmaler sind die Ellipsen.



Seien nun X und Y $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt, ρ der Korrelationskoeffizient, $g(x, y)$ die Dichte der gemeinsamen Verteilung. Beim Übergang zu den Zufallsvariablen $\sigma_x X$ und $\sigma_y Y$ ändert sich die Dichte $g(x, y)$ gemäß $h(x, y) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} g\left(\frac{x}{\sigma_x}, \frac{y}{\sigma_y}\right)$. Der Korrelationskoeffizient bleibt erhalten, beachte $\rho(X, Y) = \rho(aX, bY)$.

Die Kovarianzmatrix lautet nun:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad \sqrt{|\Sigma|} = \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \text{Cov}(X, Y)^2} = \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \text{Cov}(X, Y)^2} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\text{Cov}(X, Y) \\ -\text{Cov}(X, Y) & \sigma_x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\rho \\ -\rho & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{pmatrix}$$

Den allgemeinen Fall (gehe von * aus) erhalten wir schließlich durch eine Verschiebung, so dass der Ursprung in $(\mu_x \mid \mu_y)$ übergeht.

