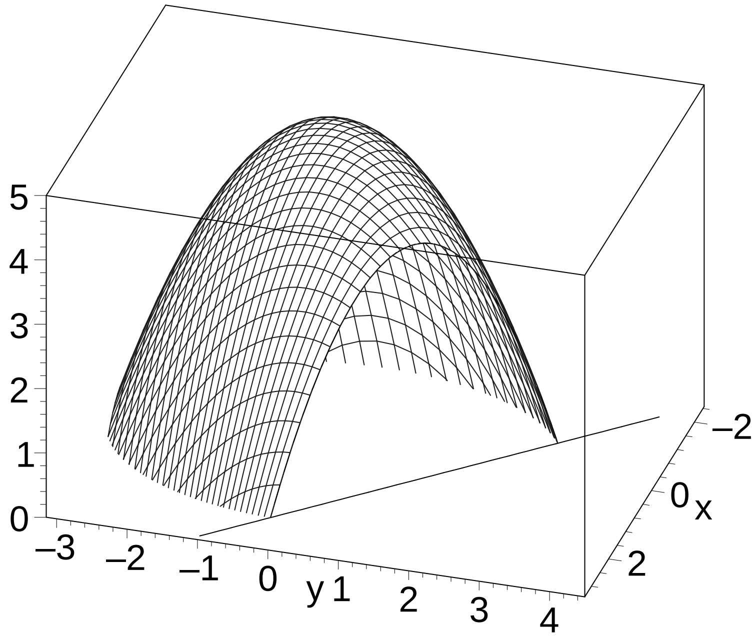
# Extrema mit Nebenbedingungen

Gesucht ist das Extremum der Funktion $f(x,y) = 5 - x^2 - \frac{1}{2}\,y^2$
unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x + y - 2 = 0\,.$

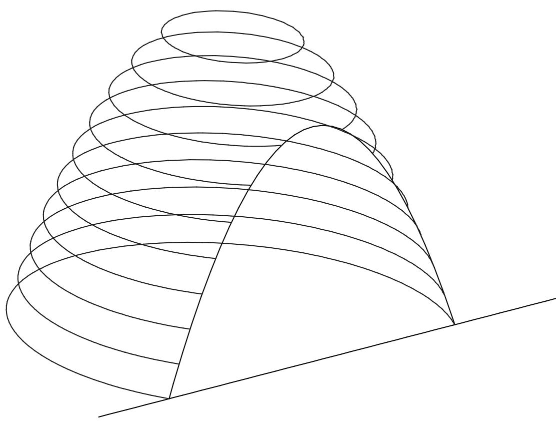



In diesem einfachen Fall kann die Nebenbedingung nach einer Variablen aufgelöst und die Zielfunktion als Funktion einer Variablen dargestellt werden.

$$x + y - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 2 - x\,, \qquad f(x, 2-x) = -\frac{3}{2}\,x^2 + 2x + 3\,, \qquad f' = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}\,,\ y = \frac{4}{3}$$

Die Untersuchung der notwendigen Bedingung soll hier genügen.

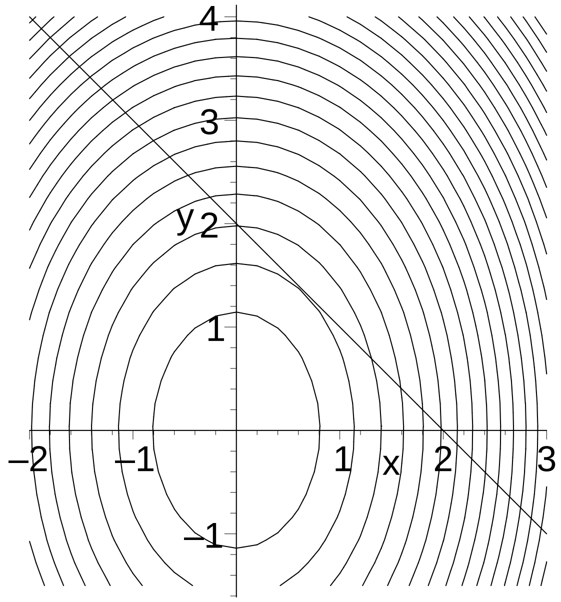
Wie ist nun vorzugehen, falls die Nebenbedingung nicht oder nur sehr schwer nach einer Variablen aufgelöst werden kann? In der Grafik ist die Idee enthalten.



# Lagrange-Funktion

Joseph Louis Lagrange 1736 - 1813

Im Extremum berührt eine Niveaulinie $f(x,y) = c$ die Nebenbedingungskurve $g(x,y) = 0$.




Um die Berührbedingungen zu ermitteln, denken wir uns eine Niveaulinie in Parameterdarstellung $x(t)$, $y(t)$ gegeben, d. h. es gilt: $f(x(t),\, y(t)) = c\,$.

$$\overset{\text{verallgemeinerte Kettenregel}}{\Longrightarrow} \quad f_x(...) \cdot x'(t) \;+\; f_y(...) \cdot y'(t) \;=\; 0 \quad \overset{\text{Skalarprodukt}}{\Longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Der Gradient von $f$ steht also senkrecht auf dem Tangentialvektor der Niveaulinie.

An der Berührstelle $(x_0,\, y_0)$ muss daher der Gradient von $f$ kollinear zum Normalenvektor der Nebenbedingung sein:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

Um Extrema aufzuspüren, ist daher das Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} f_x - \lambda\, g_x &= 0 \\ f_y - \lambda\, g_y &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem erhält man auch, indem man die sogenannte Lagrange-Funktion

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$$

aufstellt und die partiellen Ableitungen $L_x$, $L_y$, $L_\lambda$ null setzt. $\lambda$ heißt Lagrange-Multiplikator.

Für das Beispiel ist dann: $\quad L(x,y,\lambda) = 5 - x^2 - \frac{1}{2}\,y^2 \;+\; \lambda\,(x + y - 2)$

$$\begin{aligned} -2x + \lambda &= 0 \\ -y + \lambda &= 0 \\ x + y - 2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{2}{3}\,,\;\; y = \frac{4}{3},\;\; \lambda = \frac{4}{3}$$

# Extrema mit zwei Nebenbedingungen

Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x + 2y - z$

unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 8 = 0$

und $g_2(x,y,z) = x + z - 4 = 0\,.$

Die Nebenbedingungen beinhalten, dass die Funktion nur auf dem Schnitt eines Zylinders mit einer Ebene betrachtet wird, also auf einer Ellipse.

Die Lagrange-Funktion lautet nun:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1\, g_1(x,y,z) + \lambda_2\, g_2(x,y,z)$$

$L_{\lambda_1} = 0$ und $L_{\lambda_2} = 0$ ergeben die Nebenbedingungen.
$L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_z = 0$ besagen, dass sich der Gradient von $f(x,y,z)$ als Linearkombination der Normalenvektoren der Nebenbedingungs-Flächen darstellen lässt.

Das ist offensichtlich.
Werden die Nebenbedingungs-Flächen an der Stelle des Extremums durch Tangentialebenen approximiert, so steht die Schnittgerade der Tangentialebenen senkrecht auf den Normalen der Nebenbedingungen. Der Gradient von $f$ steht dann senkrecht auf der Schnittgeraden, d.h. dass eine Niveaufläche von $f$ die Schnittgerade berührt.

Für das Beispiel erhalten wir: $E_1(2\,|\,2\,|\,2)$ mit $\lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = 1$

$E_2(-2\,|\,-2\,|\,6)$ mit $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 1$

Tangentialebene des Zylinders
im Punkt $E_1(2\,|\,2\,|\,2)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

Nebenbedingungsebene: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

Gradient als Linearkombination der Normalenvektoren:

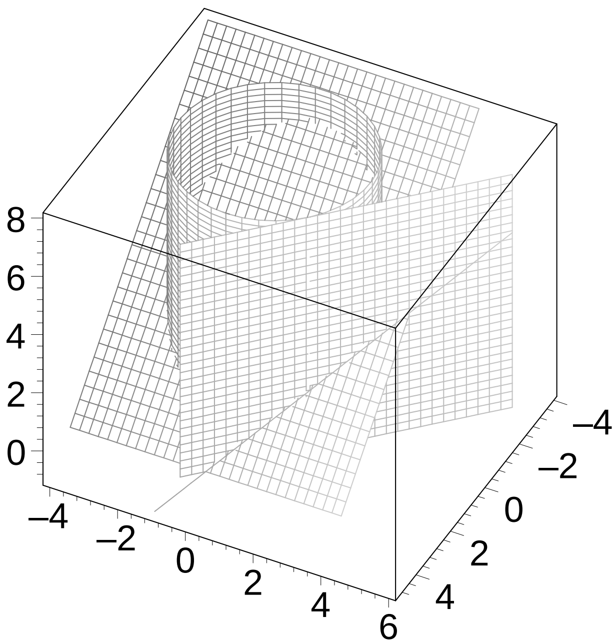
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Niveauflächen (nicht dargestellt) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - c = 0$

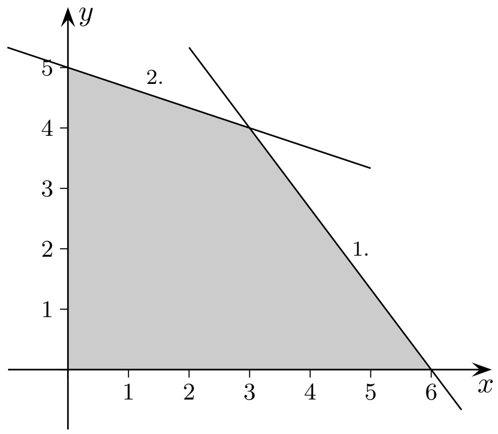
verlaufen in diesem Fall parallel zur Schnittgeraden.



# (Ökonomische) Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren

Wenden wir im Ringen um Einsicht die Lagrange-Methode auf ein lineares Problem an:
Gesucht ist das Maximum der Funktion $f(x,y) = x + y$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} &1.\quad 4x + 3y = 24 \\ &2.\quad x + 3y = 15 \end{aligned}$$




Für die Lagrange-Funktion (in der gleichwertigen Form)
$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x + y - \lambda_1\,(4x + 3y - 24) - \lambda_2\,(x + 3y - 15)$

ergeben $\begin{aligned} L_x &= 0 \\ L_y &= 0 \end{aligned}$ die Gleichungen $\begin{aligned} 4\lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 1 \end{aligned}$

mit den Lösungen: $\lambda_1 = \dfrac{2}{9}$ und $\lambda_2 = \dfrac{1}{9}$ .

Diese Gleichungen kommen uns vielleicht bekannt vor.
Hätten wir das Maximum-Problem als lineares Optimierungsproblem formuliert, so würde das duale Problem auf diese Gleichungen führen, vom Gleichheitszeichen einmal abgesehen (möglicherweise wurde so die Dualität entdeckt). Es ist zu vermuten, dass die Lösungen etwas über die Änderung des maximalen Funktionswerts bei Änderung der Kapazitätsgrenzen in den Nebenbedingungen (hier 24 und 15) aussagen.
Eine leichte Rechnung stützt diese Vermutung. Die Maximumstelle $(3\,|\,4)$ ergibt sich aus $L_{\lambda_1} = 0$ und $L_{\lambda_2} = 0$. Wird nun z.B. der Wert 24 um 1 verringert (die Kapazität wird nicht voll ausgenutzt), so verringert sich das Maximum 7 an der Stelle $(3 \mid 4)$ um $\lambda_1 = \frac{2}{9}$ , der neue Wert wird in $(\frac{8}{3} \mid \frac{37}{9})$ angenommen. In den Wirtschaftswissenschaften werden $\lambda_1,\ \lambda_2$ als Schattenpreise bezeichnet.

Bei nichtlinearen Optimierungsproblemen besteht näherungsweise dieser Zusammenhang.
Die Zielfunktion $f(x,y) = \frac{1}{5}\,(x^2 + y^2)$ nimmt an der Stelle $(3\,|\,4)$ bei gleichen Nebenbedingungen den maximalen Wert 5 an, $\lambda_1 = \frac{2}{9} = 0{,}22$ und $\lambda_2 = \frac{14}{45} = 0{,}31$.
Wird z.B. der Wert 15 um 1 verringert, so beträgt das Maximum nur noch 4,75 an der Stelle $(\frac{10}{3} \mid \frac{32}{9})$.
Bei zusätzlicher Verminderung des Werts 24 um 1 ist nun das Maximum 4,49 an der Stelle $(3 \mid \frac{11}{3})$.

Allgemein formuliert:
Gesucht ist das Optimum der Funktion $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = b$.
Für jedes $b$ gebe es eine Optimumstelle: $(x(b),\ y(b))$, für die dann gilt (siehe Lagrange-Funktion):

$$\begin{pmatrix} f_x(x(b),\ y(b)) \\ f_y(x(b),\ y(b)) \end{pmatrix} = \lambda_b \begin{pmatrix} g_x(x(b),\ y(b)) \\ g_y(x(b),\ y(b)) \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot \begin{pmatrix} x'(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} \quad \text{(Skalarprodukt)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{db}\, f(x(b),\ y(b)) = \lambda_b \cdot 1\,, \qquad \text{beachte: } g(x(b),\ y(b)) = b \text{ nach } b \text{ abgeleitet ergibt rechts 1,}$$

kürzer: $\dfrac{d}{db}\, f_{Optimum}(b) = \lambda_b$ oder als Differential $d\,f_{Optimum}(b) = \lambda_b \cdot db$