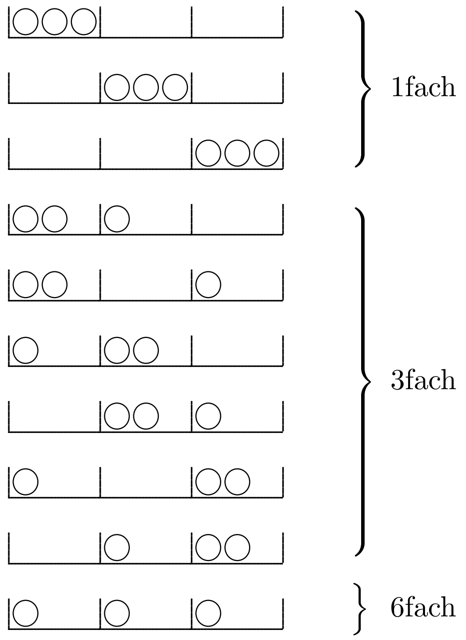
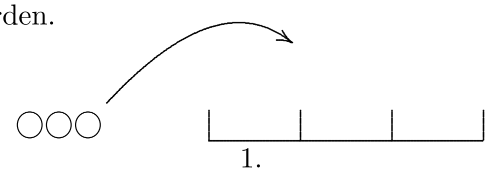
Kugel-Fächer-Modell

n Kugeln (Rosinen) sollen auf m Fächer (Brötchen) verteilt werden, zunächst 3 Kugeln auf 3 Fächer.



Es liegen $\binom{3+3-1}{3} = 10$ Verteilungsmuster vor (siehe Stochastik, k Elemente auf n Plätze).

Bei Fragestellungen, die Wahrscheinlichkeiten betreffen, sind die unterschiedlichen Häufigkeiten zu berücksichtigen. So beträgt z. B. der Anteil, dass sich im 1. Fach (links) keine Kugel befindet, $P = \frac{8}{27}$.
Dieser Anteil der kugelfreien Fächer liegt auch bei allen Fächern vor, da die 2. und 3. Fächerspalte nur jeweils eine Umordnung der 1. Spalte (innerhalb der Häufigkeitsbereiche) ist. Ein Auszählen der freien Fächer für das 1. und 2. Fach ist für das Verständnis möglicherweise hilfreich.
Das Ergebnis $P = \frac{8}{27}$ kann kürzer ermittelt werden.



Wir fragen uns erneut, mit welcher Wahrscheinlichkeit das 1. Feld frei bleibt.
Dem liegt ein Bernoulli-Experiment mit $n = 3$ und $p = \frac{2}{3}$ zugrunde. Daher gilt $P = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Werden nun n Kugeln auf m Fächer verteilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für Fächer mit genau k Kugeln:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}\,, \quad p = \frac{1}{m}, \quad q = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$$

Roolfs

Kugel-Fächer-Modell

Bei diesem Modell betrachtet man von den m Fächern ein Fach A. Die Verteilungen der n Kugeln erfolgt unabhängig und nacheinander (Bernoulli-Kette der Länge n). Eine Kugel landet mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ in A. Die Anzahl der Kugeln in A ist binomialverteilt.
Eine Aussage wie z. B. „In A sind mit 20 %iger Wahrscheinlichkeit keine Kugeln.“
heißt, da diese Wahrscheinlichkeit für alle Fächer gilt, dass 20 % der Fächer leer sind. Von 100 Fächern sind also im Schnitt 20 (Erwartungswert) leer.

Einkleidungen:

1. In einer Klasse mit 30 Schülern werden 50 Preise mit Hilfe eines Glücksrades verlost.
   Wie groß ist der Anteil derer, die leer ausgehen?
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder mindestens einen Preis gewinnt?

2. Wie groß ist der Anteil der 37 Felder beim Roulettespiel, auf denen nach 100 Spielrunden die Kugel noch nicht liegen geblieben ist?

3. In einem Buch von 200 Seiten sind 100 Druckfehler zufällig verteilt vorhanden.
   Wie groß ist der Anteil der druckfehlerfreien Seiten?
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf jeder Seite mindestens ein Druckfehler ist?

4. 10 treffsichere Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig auf 8 aufsteigende Enten.
   Wie viele Enten werden etwa überleben?

Kugel-Fächer-Modell

1. In einer Klasse mit 30 Schülern werden 50 Preise mit Hilfe eines Glücksrades verlost.
   Wie groß ist der Anteil derer, die leer ausgehen? 18,4 %
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder mindestens einen Preis gewinnt? 81,6 %

2. Wie groß ist der Anteil der 37 Felder beim Roulettespiel, auf denen nach 100 Spielrunden die Kugel noch nicht liegen geblieben ist? 6,5 %

3. In einem Buch von 200 Seiten sind 100 Druckfehler zufällig verteilt vorhanden.
   Wie groß ist der Anteil der druckfehlerfreien Seiten? 60,6 %
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf jeder Seite mindestens ein Druckfehler ist? 39,4 %

4. 10 treffsichere Jäger schießen gleichzeitig und unabhängig auf 8 aufsteigende Enten.
   Wie viele Enten werden etwa überleben? 26,3 % 2 Enten

$\frac{1}{e}$-Gesetz

Werden n Kugeln auf n Fächer verteilt, dann ist der Anteil der leeren Fächer ca. 37%.
Dieser Anteil gilt auch für Fächer mit genau einer Kugel.

Beachte hierzu:

$P(X = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{1}{e}$

$P(X = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \approx \frac{1}{e}$