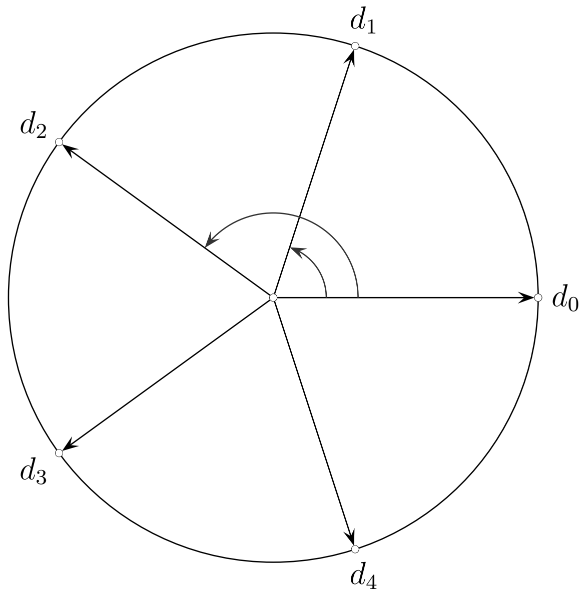
Gruppentheorie Anfänge



Der Zeiger d_1 ergibt sich aus d_0 durch eine Drehung um 72°.
Entsprechendes gilt für die anderen Zeiger.
Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen stellt eine Verknüpfung dar, z. B.

$$d_1 \circ d_2 = d_3$$
$$d_3 \circ d_4 = d_2$$

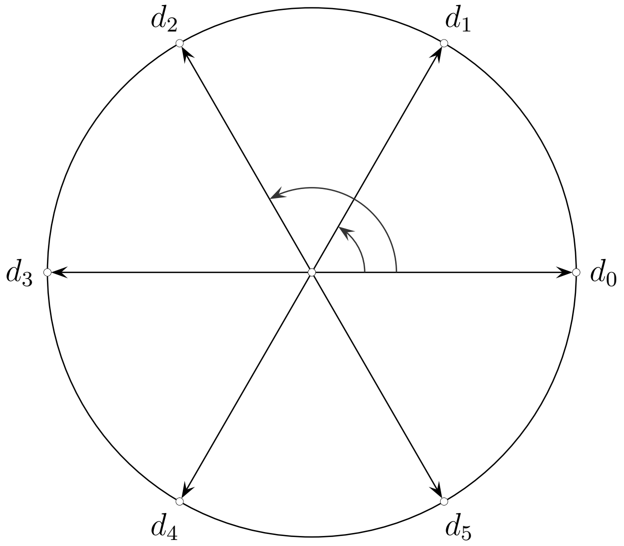
Die Reihenfolge ist unerheblich.

Fülle die Verknüpfungstafel aus.

	d_0	d_1	d_2		
d_0					
d_1					

d_1
$d_1^2 = d_1 \circ d_1$
$d_1^3 = d_1 \circ d_1 \circ d_1$
$\cdots$ ergeben alle Elemente der Gruppe. Gilt dies auch für d_3 und d_4?

Untergruppe

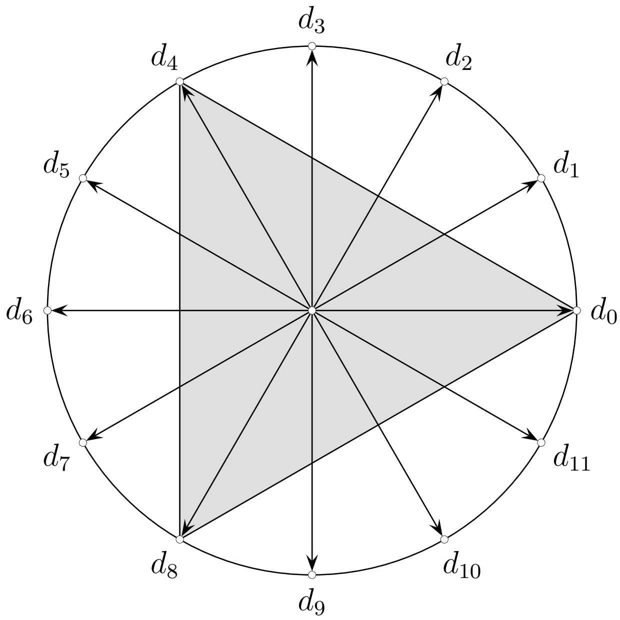


$$
\begin{aligned}
&d_1 \\
&d_1^2 = d_1 \circ d_1 \\
&d_1^3 = d_1 \circ d_1 \circ d_1 \\
&\qquad \cdots
\end{aligned}
$$

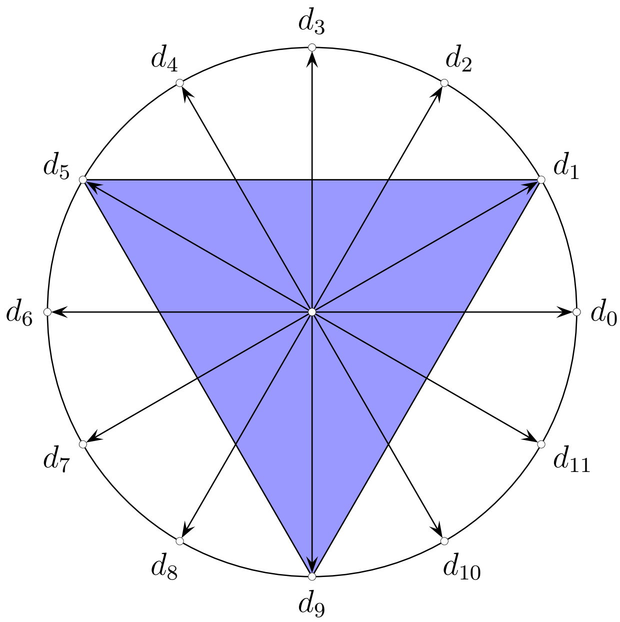
ergeben alle Elemente der Gruppe. Für welche Elemente gilt dies auch?

Die Elemente, für die das nicht zutrifft, erzeugen jeweils eine Untergruppe.

Faktorgruppe



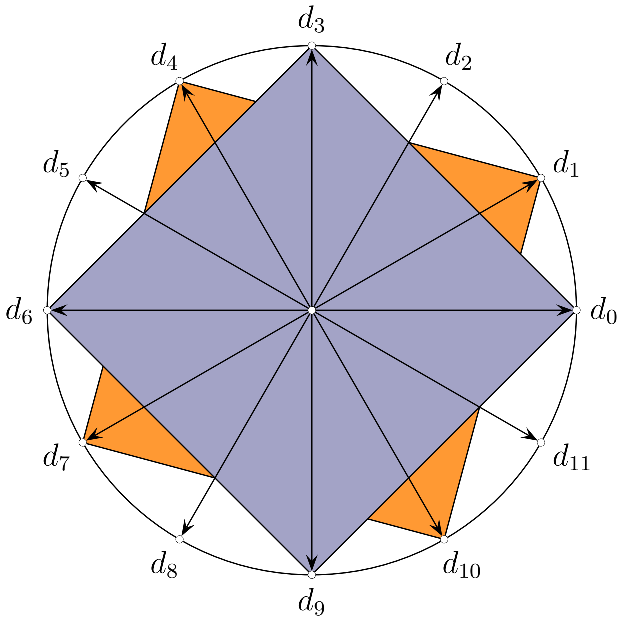
Betrachten wir die von d_4 erzeugte Untergruppe $U = \{d_4,\, d_4^2\,(= d_8),\, d_4^3\,(= d_0)\}$.
Ihre Elemente verbindet die Eigenschaft, ein gleichseitiges Dreieck zu bilden.
Dies trifft auch für andere Teilmengen zu.



Die 12-elementige Menge wird in 4 Teilmengen zerlegt, den Nebenklassen von U:
$\{U, d_1 \circ U,\, d_2 \circ U,\, d_3 \circ U,\, d_4 \circ U\}$. Auf diesen Nebenklassen kann die Verknüpfung übertragen werden. Die Vermutung liegt nahe, dass die Ordnung (Anzahl der Elemente) einer Untergruppe die Ordnung der Gruppe teilt.

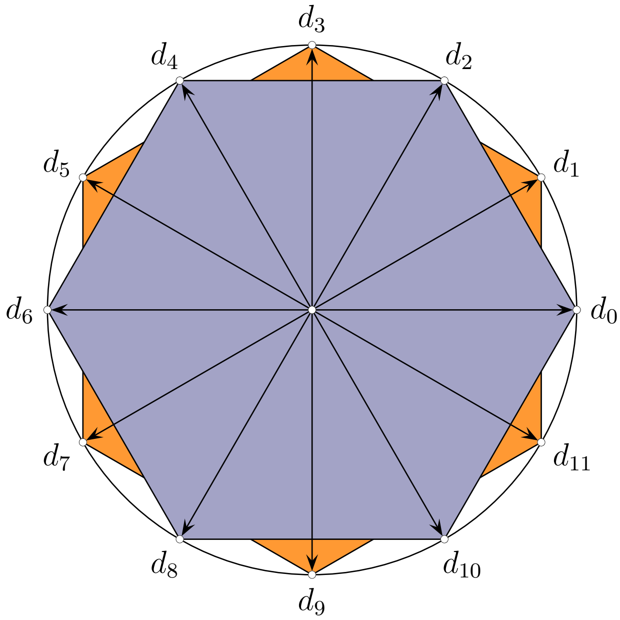
Faktorgruppe

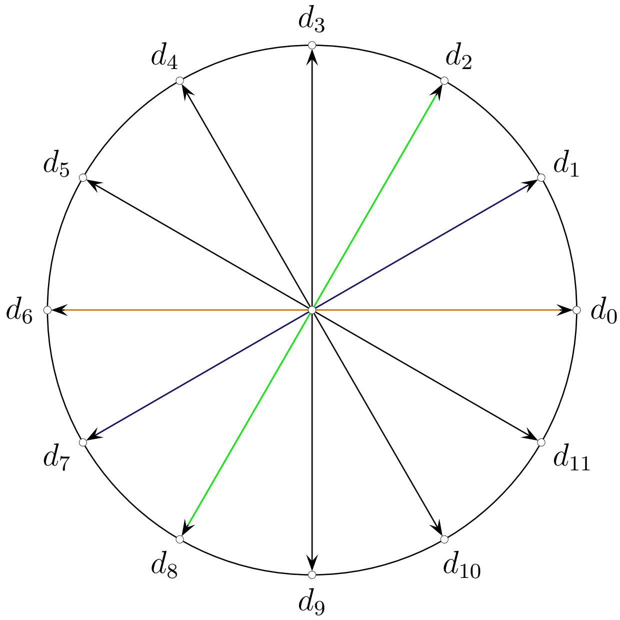
Betrachten wir die von d_3 erzeugte Untergruppe $U = \{d_3,\, d_3^2\,(= d_6),\, d_3^3\,(= d_9),\, d_3^4\,(= d_0)\}$.
Ihre Elemente verbindet die Eigenschaft, ein Quadrat zu bilden.
Dies trifft auch für andere Teilmengen zu.



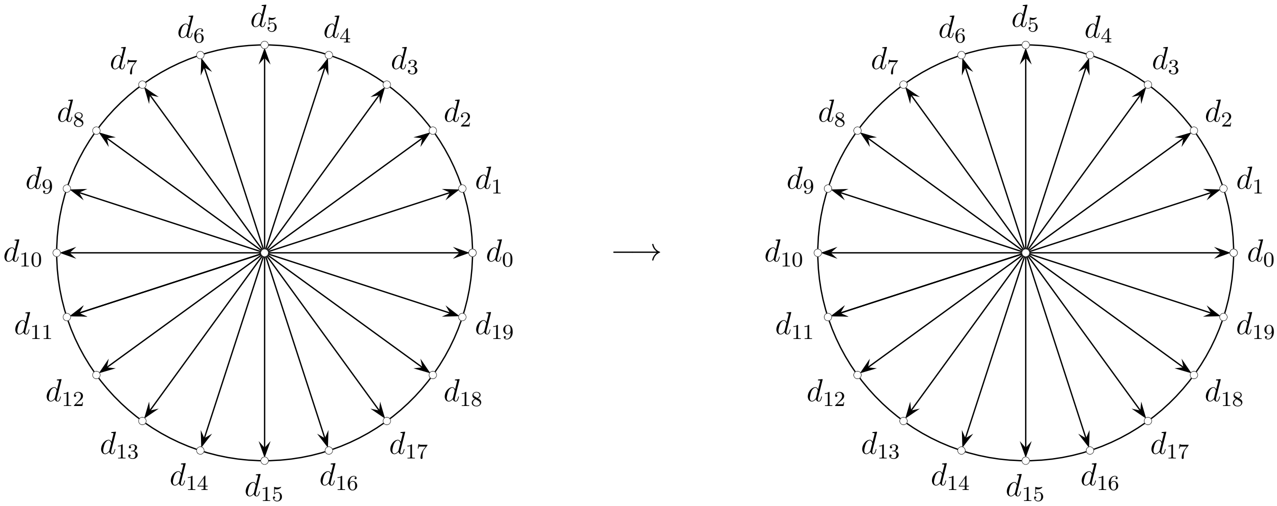
Wie viele Nebenklassen gibt es?
Zeichne für zwei weitere Untergruppen die Nebenklassen.

Faktorgruppe Hinweise





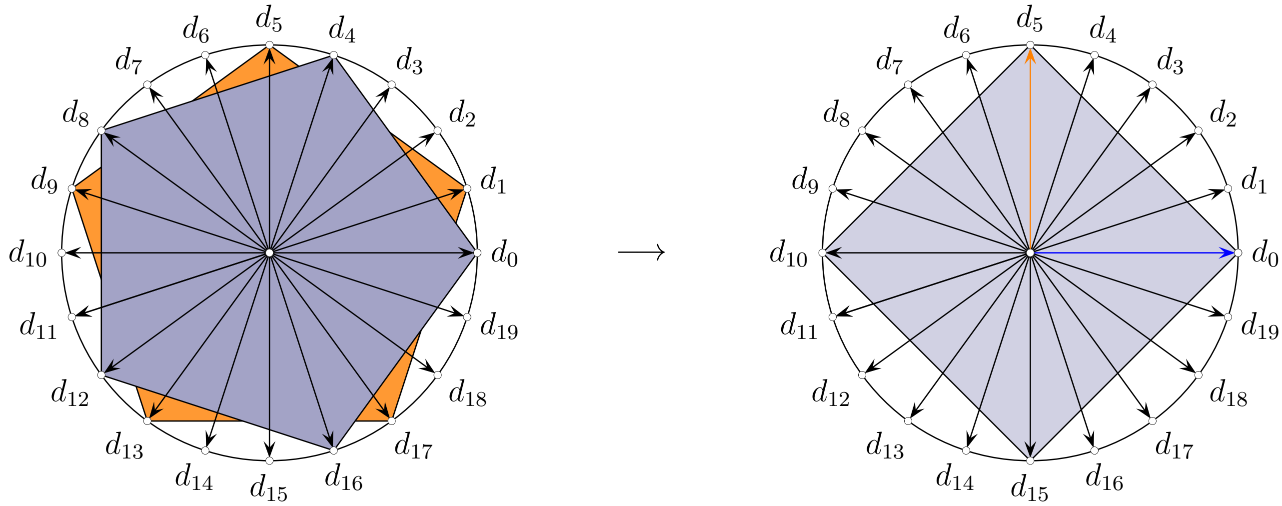
Abbildung



Eine Abbildung sei definiert durch: $f(d_i) = d_i \circ d_i \circ d_i \circ d_i \circ d_i$

Wie viele verschiedene Bildelemente gibt es?

Abbildung



Eine Abbildung sei definiert durch: $f(d_i) = d_i \circ d_i \circ d_i \circ d_i \circ d_i$

Wie viele verschiedene Bildelemente gibt es?

Die Elemente der Untergruppe $U = \{d_0, d_4, d_8, d_{12}, d_{16}\}$ werden auf d_0 abgebildet,
die Elemente der Nebenklasse $U \circ d_1$ auf d_5, die von $U \circ d_2$ auf d_{10}, usw.
Es gibt also 4 Bildelemente.

In einer nichtkommutativen Gruppe G mit einem Homomorphismus f (auf G) hat diejenige Untergruppe U (Kern von f), deren Elemente auf das neutrale Element e abgebildet werden, eine besondere Eigenschaft (Normalteiler). Für alle $a \in G$ gilt die Mengengleichheit:

$$a \circ U \circ a^{-1} = U$$

Rechte und linke Nebenklassen stimmen dann überein.

Sei u aus U. Dann folgt

$$f(a \circ u \circ a^{-1}) = f(a) \circ f(u) \circ f(a)^{-1} = e \quad \text{und damit:} \quad a \circ U \circ a^{-1} \subset U$$

Da beide Mengen gleich viele Elemente haben, stimmen sie überein.