

# Grenzwert

Wir betrachten die Zahlenfolge  $a_n$ ,

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \frac{8119}{5741}, \frac{19601}{13860}, \frac{47321}{33461}, \dots$$

die aufgrund eines Bildungsgesetzes (welches?) unbegrenzt fortgesetzt werden kann.

Die Folgenglieder nähern sich immer mehr  $\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969 \dots$  an, siehe Verschiedenes, Kettenbrüche.

$\sqrt{2}$  ist die Bezeichnung für eine bestimmte Zahl. Die Folge stellt eine Möglichkeit dar, diese Zahl auf beliebig viele Stellen genau zu ermitteln.

Dieser Sachverhalt wird durch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$  beschrieben.

$\sqrt{2}$  ist der Grenzwert der Folge  $a_n$ .

$\sqrt{2}$  ist nicht als Bruch darstellbar und kann somit auch nicht in der Folge auftauchen.

Welche Eigenschaft muss eine Zahlenfolge  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  haben, damit mit ihr eine Zahl  $a$  beliebig genau ausgerechnet werden kann?

Zu beliebig vorgegebener Stellenanzahl  $k$  muss es jeweils eine Stelle  $n_0$  in der Folge geben, von der ab alle weiteren Folgenglieder mit  $a$  in den ersten  $k$  Stellen übereinstimmen.

Oder:

Zu beliebig vorgegebener Ungenauigkeit  $\varepsilon$  (griech. epsilon, z.B.  $\varepsilon = 0,01$  oder  $\varepsilon = 0,0001$ ,

$\varepsilon$  erinnert an error) muss es jeweils eine Stelle  $n_0$  in der Folge geben, von der ab die Abweichung der Folgenglieder von der Zahl  $a$  kleiner als die vorgegebene Ungenauigkeit ist.

Die Abweichung ist der Betrag der Differenz, also  $|a_n - a|$ .

Und kürzer:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$



Für jede Umgebung von  $a$  muss es eine Stelle in der Folge geben, von der ab alle weiteren Folgenglieder in der Umgebung liegen. Zum Nachweis der Konvergenz kann verwendet werden:

Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent, desgleichen falls sie das Cauchy-Kriterium erfüllt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Jede reelle Zahl kann als Grenzwert einer Folge gesehen werden.