

# Extrema von Funktionen mit zwei Variablen

Es gilt der Satz:

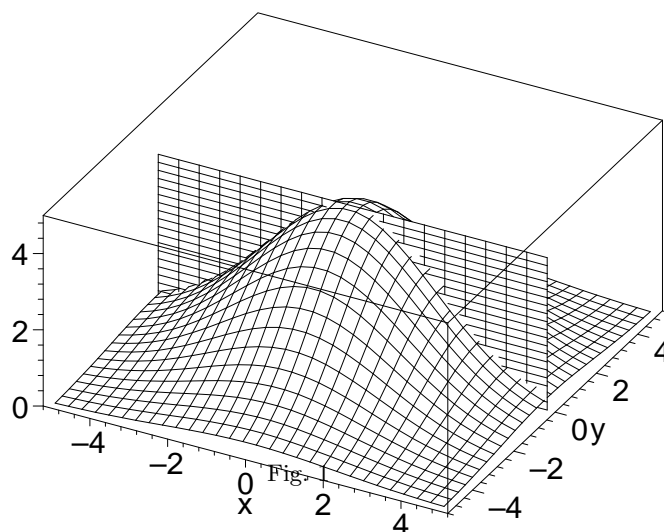
Ist an einer Stelle  $(x_0, y_0)$

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ und } f_y(x_0, y_0) = 0$$

und besteht außerdem die Ungleichung

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0,$$

so liegt an dieser Stelle ein Extremum vor, und zwar ein Maximum, wenn  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , und ein Minimum, wenn  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  ist.



Wir wollen uns diesen Satz plausibel machen und betrachten hierzu alle Kurven, die sich als Schnitt der Fläche mit Ebenen ergeben, die senkrecht zur  $xy$ -Ebene durch die Stelle  $(x_0, y_0)$  verlaufen. Wenn ein Extremum vorliegt, so gilt dies sicherlich auch für die Schnittkurven in  $x$ - und  $y$ -Richtung, d.h. die partiellen Ableitungen sind an dieser Stelle null. Die Sattelfläche (siehe Schiebeflächen) zeigt, dass diese Bedingung noch nicht hinreichend ist.

Die Schnittkurven werden durch:  $g(\lambda) = f(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b)$ ,  $a$  und  $b$  beliebig, erfasst.

$$\text{Es ist } g''(\lambda) = f_{xx}(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \cdot a^2 + 2f_{xy}(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \cdot ab + f_{yy}(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \cdot b^2$$

$$\text{und für } \lambda = 0 \text{ ergibt sich: } g''(0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot a^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) \cdot ab + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot b^2.$$

Beim Zusammenfassen werden  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$  und die verallgemeinerte Kettenregel benutzt. Beide Regeln können ohne großen Aufwand eingesehen werden (siehe weiter unten).

Um erkennen zu können, welches Vorzeichen  $g''(0)$  hat, formen wir weiter um, zur einfacheren Schreibweise werden die Argumente weggelassen. Falls  $f_{xx} > 0$  oder  $f_{xx} < 0$  ist, liegt zumindest für die Schnittkurve in  $x$ -Richtung ein Extremum vor. Wir klammern daher  $f_{xx}$  aus und ergänzen quadratisch, damit das Vorzeichen erhalten bleibt.

$$g''(0) = f_{xx} \cdot a^2 + 2f_{xy} \cdot ab + f_{yy} \cdot b^2 = f_{xx} \left[ \left( a + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \cdot b \right)^2 + \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2} b^2 \right]$$

Nun ist zu erkennen: Der Term in eckigen Klammern ist stets positiv, falls  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  ist (falls  $b = 0$  ist, müsste  $a \neq 0$  sein), so dass  $f_{xx}$  das Vorzeichen von  $g''(0)$  festlegt.

Das Beispiel  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

wirft leider einen Schatten auf unsere bisherigen Überlegungen. Sämtliche Schnittkurven der angegebenen Art besitzen an der Stelle  $(0, 0)$  ein Minimum, doch dieses gilt nicht für die Funktion  $f(x, y)$ .

Nur im Bereich zwischen den Graphen von  $y = x^2$  und  $y = 2x^2$  in der  $xy$ -Ebene ist die Funktion  $f$  negativ. In jeder Umgebung des Ursprungs existieren daher negative und positive Funktionswerte (man setze  $y = \frac{3}{2}x^2$  ein).

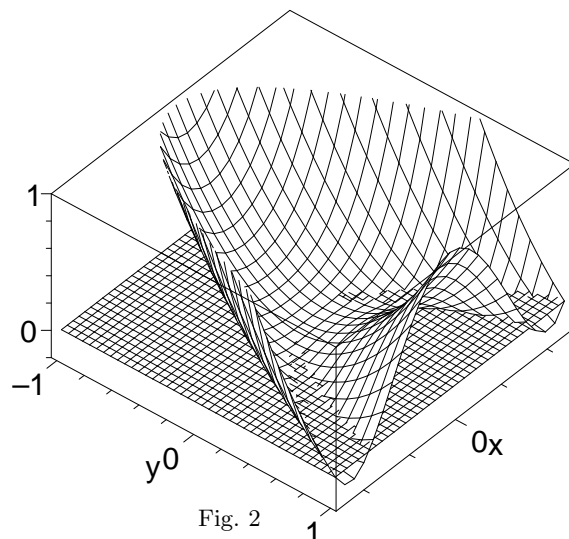


Fig. 2

Wir müssen unsere Überlegungen daher auf beliebige Schnitte und damit auf Wege  $(\phi_1(t), \phi_2(t))$  erweitern, die für  $t = 0$  durch  $(x_0, y_0)$  verlaufen und deren Ableitungen nicht beide an der Stelle  $t = 0$  verschwinden, es muss also eine Tangente an dieser Stelle existieren. Eine erneute Rechnung ergibt nun:

$$g''(0) = f_{xx} \cdot a^2 + 2f_{xy} \cdot ab + f_{yy} \cdot b^2,$$

mit  $a = \phi_1'(0)$  und  $b = \phi_2'(0)$ .

Das erwähnte Kriterium ist also auch hinreichend dafür, dass jede Schnittkurve, deren zugehöriger Weg in der  $xy$ -Ebene eine glatte (d.h. differenzierbare) Kurve ist, ein Extremum an der Stelle  $(x_0, y_0)$  hat.

Nun ist es plausibel, dass dann auch die Funktion  $f(x, y)$  an dieser Stelle ein Extremum aufweist.

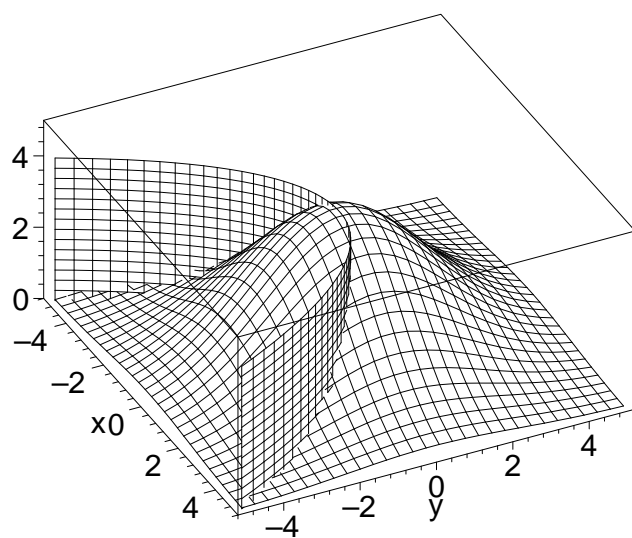


Fig. 3

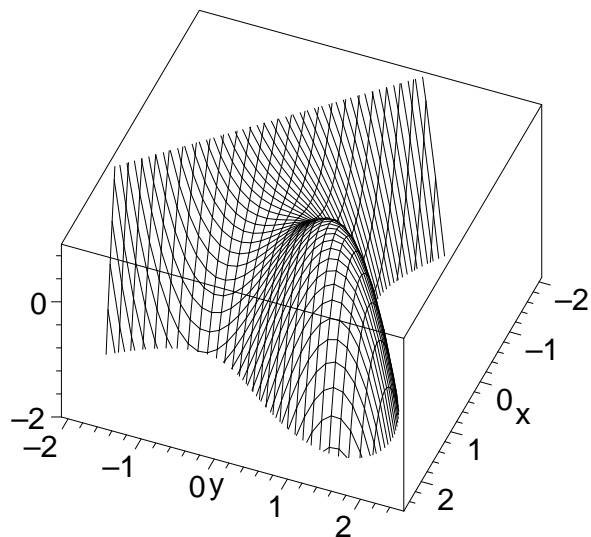


Fig. 4

Beispiel:

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$$

Die notwendigen Bedingungen  $f_x = 0$  und  $f_y = 0$  führen zu dem Gleichungssystem:

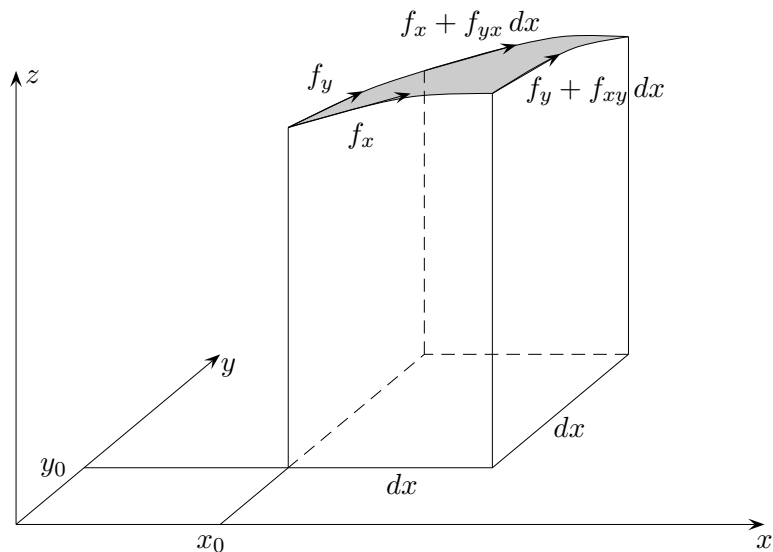
$$\begin{aligned} 3y - 3x^2 &= 0 \\ 3x - 3y^2 &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$

$$\begin{aligned} f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) &= 0, \quad f_{xy}(0, 0) = 3 \\ f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 &= -9 < 0 \\ f_{xx}(1, 1) = f_{yy}(1, 1) &= -6, \quad f_{xy}(1, 1) = 3 \\ f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 &= 27 > 0 \end{aligned}$$

Nur an der Stelle  $(1, 1)$  ist das hinreichende Kriterium erfüllt, hier liegt ein Maximum vor.

Satz von Schwarz:  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$  (unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen)



Die partiellen Ableitungen werden an der Stelle  $(x_0, y_0)$  betrachtet. Die Funktion  $f_y(x, y_0)$ , deren Variable  $x$  ist, wird gemäß  $f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) dx$  linear approximiert. Dann ist

$$f_y(x_0 + dx, y_0) = f_y(x_0, y_0) + f_{xy}(x_0, y_0) dx, \quad \text{Entsprechendes gilt für } f_x.$$

Der Grafik kann entnommen werden:

$$dz = f_x dx + (f_y + f_{xy} dx) dx = f_y dx + (f_x + f_{yx} dx) dx \implies f_{xy} = f_{yx}$$

Verallgemeinerte Kettenregel: (einfacher Spezialfall)

Sei  $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$ , dann ist

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0) \cdot a + f_y(x_0, y_0) \cdot b.$$

Betrachten wir die Tangentialebene von  $f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ , es ist

$$dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$$

(siehe Tangentialebene und Gradient).

Erhöht sich  $t$  für  $t = 0$  um  $dt$ , so wächst  $(x_0, y_0)$  um  $a dt$  in  $x$ -Richtung und  $b dt$  in  $y$ -Richtung und

$$g(t) \text{ daher um } dz = f_x(x_0, y_0) a dt + f_y(x_0, y_0) b dt.$$

Das ist die Behauptung (siehe Lineare Näherung).

Der Verallgemeinerung liegt die gleiche Idee zugrunde.

$$g(t) = f(\phi_1(t), \phi_2(t)) \implies g'(t) = f_x(\phi_1(t), \phi_2(t)) \cdot \phi_1'(t) + f_y(\phi_1(t), \phi_2(t)) \cdot \phi_2'(t)$$

Erhöht sich  $t$  für  $t = t_0$  um  $dt$ , so wächst  $(\phi_1(t), \phi_2(t))$  um  $\phi_1'(t) dt$  in  $x$ -Richtung und  $\phi_2'(t) dt$  in  $y$ -Richtung.

