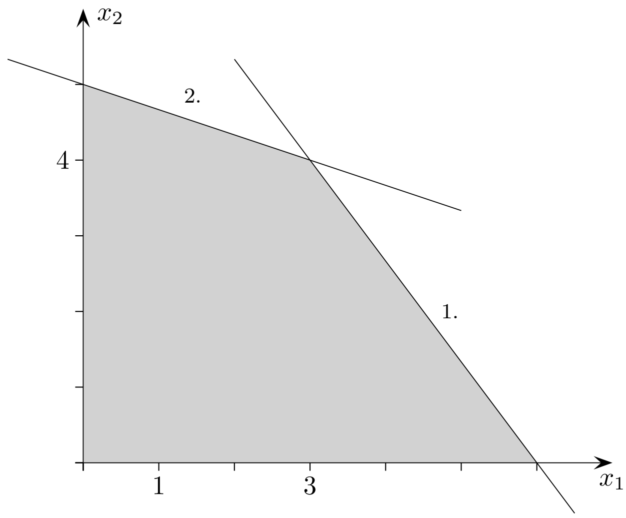
Dualität entdecken



Betrachten wir das Maximum-Problem, $x_1, x_2 \geq 0$.

$$\begin{array}{rrcrcr} 1. & 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 24 \\ 2. & x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 15 \end{array}$$

$$Z \;=\; 5\,x_1 \;+\; 4\,x_2 \quad\longrightarrow\quad \mathit{Max}$$

und geben die Zielfunktion Z in Abhängigkeit von den Schlupfvariablen $y1$ und $y2$ an (Maple).

```
g1:=   4* x1  +  3*x2  +  y1  =  24:
g2:=      x1  +  3*x2  +  y2  =  15:

g3:=              5* x1  +  4*x2  =  Z:

L:= solve({g1, g2, g3}, {x1, x2, Z})
```

Ergebnis: $Z = 31 - \frac{11}{9}\,y1 - \frac{1}{9}\,y2$

$x1 = 3,\ x2 = 4,\ Z = 31$

Aus der Darstellung von Z ist die Lösung ablesbar. Für das Maximum müssen $y1 = 0$ und $y2 = 0$ sein. Wäre $y1 = 1$, so bedeutete das eine Verringerung um eine Einheit der 1. Ressource (oder die Kapazität würde nicht ganz ausgenutzt). Der Zielfunktionswert verringerte sich um den Schattenpreis $\frac{11}{9}$. Entsprechendes gilt für $y2$. Eine Variation der Ressourcen überzeugt uns von diesem Zusammenhang.

```
with(simplex):
  g1:=  4*x1  +  3*x2  <=  25:
  g2:=    x1  +  3*x2  <=  13:
ziel:= 5*x1 + 4*x2:
L:= maximize(ziel, {g1, g2}, NONNEGATIVE);
subs(L, ziel);
```

liefert die Ausgabe: L:= {x1 = 4, x2 = 3}

32 $(= 31 + 1 \cdot \frac{11}{9} - 2 \cdot \frac{11}{9})$

Diese Schattenpreise $u_1 = \frac{11}{9}$ und $u_2 = \frac{1}{9}$ sind erstaunlicherweise die Lösung eines linearen Minimum-Problems, des sogenannten dualen Problems, im Gegensatz zum anfänglichen, dem primalen Problem.

Sei (x_1°, x_2°) Lösung des primalen Maximierungs-Problems und seien u_1°, u_2° die Zielfunktionszuwächse bei Vergrößerung der 1. bzw. 2. Ressource um eine Einheit. Eine Vergrößerung der 1. Ressource um 4 Einheiten und der 2. Ressource um 1 Einheit würde bewirken, dass $(x_1^\circ + 1, x_2^\circ)$ die Ungleichungen erfüllt und der Zielfunktionszuwachs mindestens 5 Einheiten beträgt. Entsprechend würde eine Vergrößerung beider Ressourcen um jeweils 3 Einheiten einen Zielfunktionszuwachs von mindestens 4 Einheiten erbringen. Für die Schattenpreise gelten daher die Ungleichungen:

1. $4\,u_1 \;+\; u_2 \;\geq\; 5$
2. $3\,u_1 \;+\; 3\,u_2 \;\geq\; 4$

Beachte: Vertikales Lesen der primalen Ungleichungen führt zu den dualen Ungleichungen.

Um die Zielfunktion eines linearen Optimierungsproblems mit den Variablen u_1, u_2 ($u_1, u_2 \geq 0$) zu entdecken, verallgemeinern wir das Bisherige und multiplizieren und addieren die Ungleichungen:

Primales Problem:

$$\left.\begin{array}{lclcll} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & \leq & b_1 & |\cdot u_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & \leq & b_2 & |\cdot u_2 \end{array}\right\} +$$

$$Z \;=\; p_1\,x_1 \;+\; p_2\,x_2 \;\longrightarrow\; \mathit{Max}$$

Duale Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{lclcll} a_{11}\,u_1 & + & a_{21}\,u_2 & \geq & p_1 & |\cdot x_1 \\ a_{12}\,u_1 & + & a_{22}\,u_2 & \geq & p_2 & |\cdot x_2 \end{array}\right\} +$$

Die linken Seiten stimmen überein und es gilt die Ungleichung (sogenannte schwache Dualität):

$$p_1\,x_1 + p_2\,x_2 \;\leq\; b_1\,u_1 + b_2\,u_2$$

Hieraus ist zu sehen, dass jede zulässige Lösung (d. h. Zahlenpaare, die den Ungleichungen und Vorzeichenbedingungen genügen) des einen Problems den optimalen Wert des anderen begrenzt.
Als geeignete Zielfunktion unseres dualen Problems erweist sich nun

$$Z^* \;=\; b_1\,u_1 \;+\; b_2\,u_2 \;\longrightarrow\; \mathit{Min}\;,$$

da dieses duale Problem genau dann eine optimale Lösung besitzt, wenn dies für das primale zutrifft. Die Zielfunktionswerte sind gleich, $Z = Z^*$, sofern sie existieren. Dies soll sichtbar gemacht werden.

Sei $(x_1^\circ,\, x_2^\circ)$ die Lösung des primalen Problems und nehmen wir an, dass beide Restriktionen aktiv sind, d. h. es gilt:

$$\begin{array}{lclcl} a_{11}\,x_1^\circ & + & a_{12}\,x_2^\circ & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1^\circ & + & a_{22}\,x_2^\circ & = & b_2 \end{array}$$

Dann ist auch das Gleichungssystem (die Koeffizientenmatrix wurde transponiert)

$$\begin{array}{lclcl} a_{11}\,u_1 & + & a_{21}\,u_2 & = & p_1 \\ a_{12}\,u_1 & + & a_{22}\,u_2 & = & p_2 \end{array}$$

eindeutig lösbar: $u_1^\circ \;=\; \dfrac{p_1\,a_{22} - p_2\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}, \quad u_2^\circ \;=\; \dfrac{p_2\,a_{11} - p_1\,a_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$

und aus der Herleitung der schwachen Dualität folgt
(statt der Ungleichheitszeichen sind lediglich Gleichheitzeichen zu verwenden):

$$p_1\,x_1^\circ + p_2\,x_2^\circ \;=\; b_1\,u_1^\circ + b_2\,u_2^\circ$$

Gilt auch $u_1^\circ,\, u_2^\circ \geq 0$?
$u_1^\circ,\, u_2^\circ$ sind in der Zielfunktion für die optimale Lösung des primalen Problems enthalten.

$$Z \;=\; Z_{\mathrm{max}} \;-\; \underbrace{\frac{p_1\,a_{22} - p_2\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}}_{>\,0}\; y_1 \;-\; \underbrace{\frac{p_2\,a_{11} - p_1\,a_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}}_{>\,0}\; y_2$$

Analog hätten wir von einer Lösung des dualen Problems ausgehen können.
Falls neben den beiden aktiven Restriktionen des primalen Problems auch noch eine inaktive vorhanden ist, für die also gilt:

$$a_{31}\, x_1^\circ \quad + \quad a_{32}\, x_2^\circ \quad < \quad b_3$$

dann wird die Lösung für das duale Problem, das zu den aktiven Restriktionen gehört, um $u_3^\circ = 0$ ergänzt.
Die angesprochenen Zusammenhänge bleiben erhalten.
$u_3^\circ = 0$ stimmt mit der Interpretation als Schattenpreis überein.
Eine Vergrößerung der dritten Ressource brächte keinen Zielfunktionszuwachs, da diese Ressource ohnehin nicht ausgeschöpft wurde.
Soweit die Theorie, nun die Maple-Praxis:

```
with(simplex):
ziel:= 5*x1 + 4*x2:
     L:= maximize(ziel,
      { 4*x1  +  3*x2  <=  24,
          x1  +  3*x2  <=  15,
        2*x1  +  5*x2  <=  27  },   NONNEGATIVE);
subs(L, ziel);
```

Ausgabe: L:= {x1 = 3, x2 = 4}

31

```
with(simplex):
ziel:= 24*u1 + 15*u2 + 27*u3:
     L:= minimize(ziel,
      { 4*u1  +    u2  +  2*u3  >=  5,
        3*u1  +  3*u2  +  5*u3  >=  4  },   NONNEGATIVE);
subs(L, ziel);
```

Ausgabe: L:= {u1 = $\frac{11}{9}$, u2 = $\frac{1}{9}$, $u_3 = 0$}

31