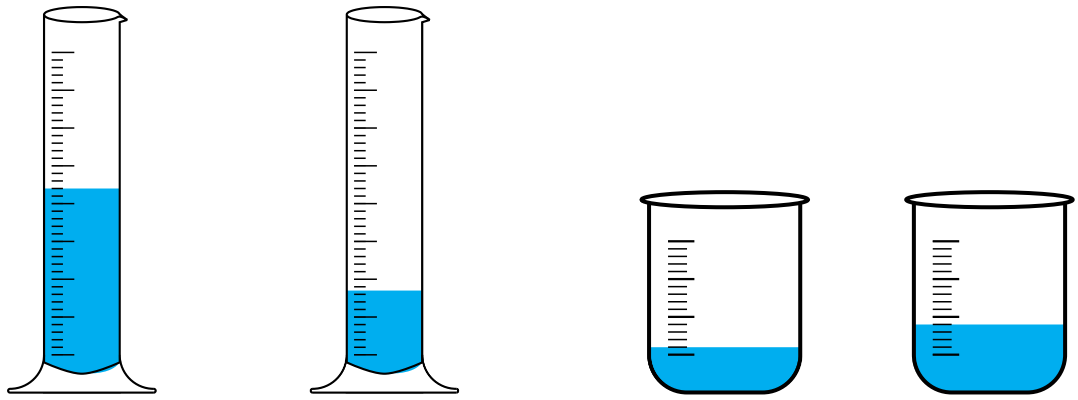
Matrizenrechnung   Umfüllprozesse

In 2 Messzylindern A und B befinden sich anfänglich die Flüssigkeitsmengen m_1 und m_2.
Aus A wird der Anteil a entnommen, aus B der Anteil b (2 weitere Gefäße sind daher erforderlich). Anschließend werden die entnommenen Flüssigkeitsmengen jeweils in den anderen Zylinder geschüttet. Dieser Vorgang wird wiederholt.



$$
\begin{aligned}
A_{\text{neu}} &= (1-a)A_{\text{alt}} + bB_{\text{alt}} \\
B_{\text{neu}} &= aA_{\text{alt}} + (1-b)B_{\text{alt}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} A_{\text{neu}} \\ B_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{\text{alt}} \\ B_{\text{alt}} \end{pmatrix}
$$

GTR: $[\mathcal{A}] * [\mathcal{B}] \to [\mathcal{B}]$, ENTER-Taste (wiederholt), der Startvektor $\mathcal{B}$ ist eine 2×1-Matrix.

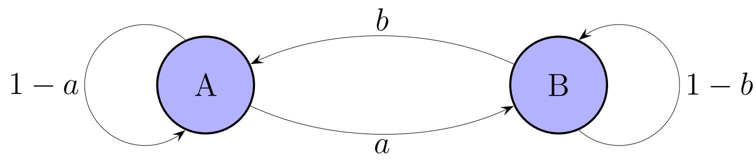
Die Grenzverteilung kann mit der Gleichgewichtsbedingung

$$
\begin{aligned}
aA &= bB \\
A + B &= m_1 + m_2
\end{aligned}
$$

ermittelt werden.

Roolfs

Umfüllprozesse   Fortsetzung



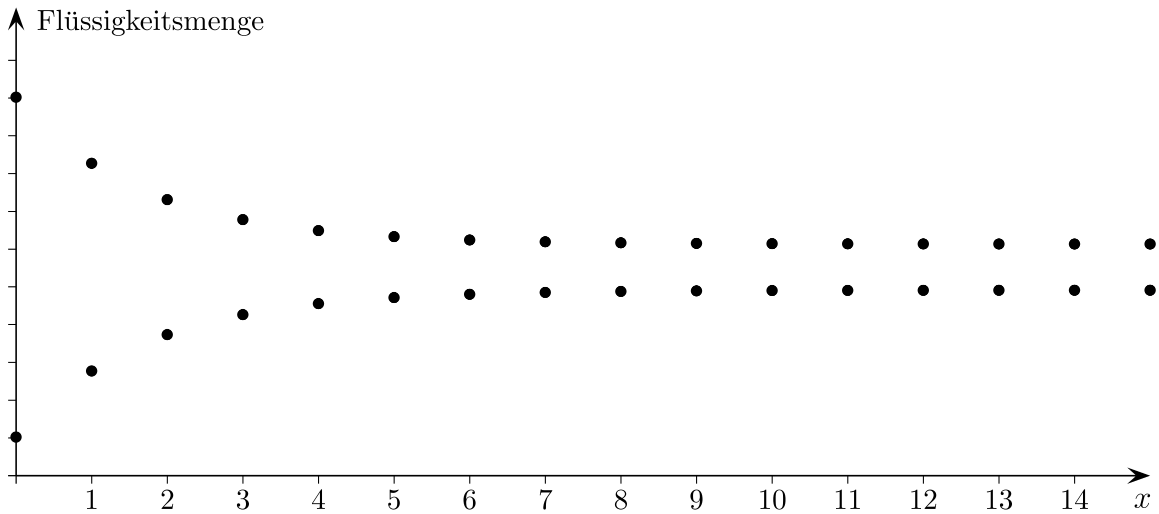
$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{x}_0$ als Anfangszustand (Anfangsverteilung) erhalten wir nach einer Zeiteinheit $\vec{x}_1 = \mathcal{M} \cdot \vec{x}_0$, nach 2 Zeiteinheiten: $\vec{x}_2 = \mathcal{M} \cdot \vec{x}_1 = \mathcal{M} \cdot (\mathcal{M} \cdot \vec{x}_0)$, usw.
Wie muss die Multiplikation $\mathcal{M} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{M}^2$ von Matrizen beschaffen sein, damit gilt:

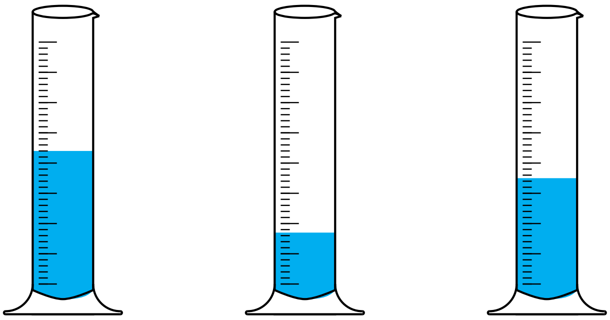
$$\mathcal{M} \cdot (\mathcal{M} \cdot \vec{x}_0) = \mathcal{M}^2 \cdot \vec{x}_0\,?$$

Die Frage beantwortet das Blatt Matrizenmultiplikation.

Typischer Graph



Umfüllprozesse   Ausblick



Der Umfüllprozess lässt sich auf drei und mehr Gefäße erweitern. Er ist ein Modell für alle Übergangsprozesse, wobei Änderungen möglich sind, z. B.: Ein Gefäß hat ein Leck oder in ein Gefäß wird stets die doppelte Menge eines anderen Gefäßes gefüllt.

Uns interessiert, unter welchen Bedingungen sich langfristig eine Gleichgewichtsverteilung (stationäre Verteilung) einstellt und ob diese von der Anfangsverteilung abhängt. Umfüllvorgänge, die durch stochastische Matrizen (Spaltensumme 1) beschrieben werden, kommen in die nähere Wahl. Betrachte jedoch hierzu:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ein Umfüllprozess gelangt vermutlich in einen von der Anfangsverteilung unabhängigen Gleichgewichtszustand, wenn ...

die gesamte Flüssigkeitsmenge in der Weise verbunden ist, dass sich eine Einfärbung der Flüssigkeit eines Gefäßes auf alle Gefäße verbreiten würde, da kleine Flüssigkeitsmengen durch das (wiederholte) Umfüllen grundsätzlich in jedes Gefäß gelangen können.