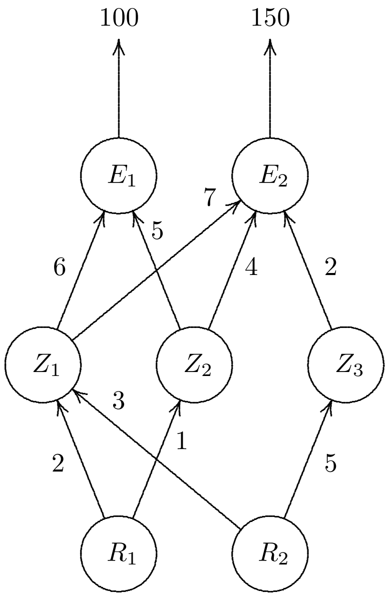
Materialverflechtung

In einem Unternehmen mit mehrstufigem Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:



Der Pfeil z. B. von R_1 nach Z_1 gibt an, dass pro Mengeneinheit (ME) des Zwischenprodukts Z_1 2 Mengeneinheiten des Rohstoffs R_1 erforderlich sind.

Die Frage ist nun, wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1 und R_2 zur Verfügung stehen müssen, um eine Produktion der Endprodukte $E_1 = 100$ (ME) und $E_2 = 150$ (ME) zu ermöglichen.

Die Mengenangaben können in sogenannten Verflechtungsmatrizen erfasst werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	0
R_2	3	0	5

	E_1	E_2
Z_1	6	7
Z_2	5	4
Z_3	0	2

Die Spalte z. B. für Z_1 gibt an, dass für dieses Zwischenprodukt die Rohstoffmengen $R_1 = 2$ (ME) und $R_2 = 3$ (ME) benötigt werden.
Es ist nun offensichtlich, wie die Anzahlen der Mengeneinheiten für die Zwischenprodukte und dann für die Rohstoffe zu berechnen sind. Besonders übersichtlich ist die Matrizenschreibweise:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} \text{ heißt Outputvektor.}$$

Für den Zwischenproduktvektor gilt: $\vec{z} = B \cdot \vec{y}$

und für den Rohstoffmengenvektor (oder Inputvektor): $\vec{x} = A \cdot \vec{z} = A \cdot (B \cdot \vec{y}) = (A \cdot B) \cdot \vec{y} = C \cdot \vec{y}$

Wir erhalten $C = \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4400 \\ 6450 \end{pmatrix}$, d. h. $R_1 = 4400$ (ME), $R_2 = 6450$ (ME)

Matrizenmultiplikation

Es ist:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Wir fragen uns, wie die Multiplikation von Matrizen beschaffen sein muss, damit gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]}$$

$$= \begin{pmatrix} e(ax + by) + f(cx + dy) \\ g(ax + by) + h(cx + dy) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{pmatrix}$$

Es muss also sein:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

Das Multiplikationsschema für Matrizen ist leicht zu merken:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & b_1 \\ \cdot & \cdot & b_2 \\ \cdot & \cdot & b_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \blacksquare \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{AB} \end{array}$$

$$\blacksquare = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Materialverflechtung

Wie viele ME von R_1, R_2 und R_3 sind für die Herstellung einer ME von E_1 bzw. E_2 erforderlich?

	E_1	E_2
Z_1	1	9
Z_2	2	3
Z_3	6	5

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	4	0	8
R_2	5	7	3
R_3	2	6	0

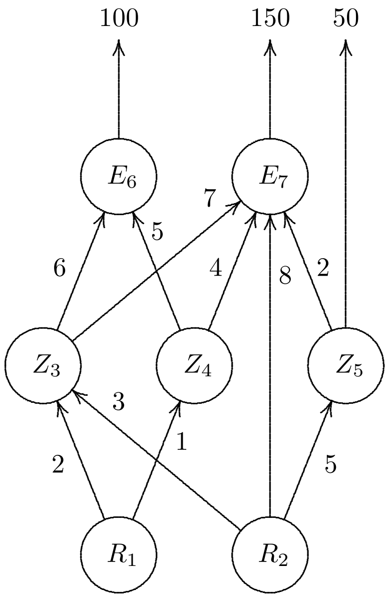
Materialverflechtung

	E_1	E_2
Z_1	1	9
Z_2	2	3
Z_3	6	5

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	4	0	8
R_2	5	7	3
R_3	2	6	0

52	76
37	81
14	36

Stücklistenproblem, Gozintograph



Dieses Verflechtungsmodell berücksichtigt, dass Rohstoffe direkt in die Endprodukte eingehen oder dass auch eine externe Nachfrage nach bestimmten Zwischenprodukten besteht.
Die Frage lautet, nach welcher Stückliste (Liste der Mengenangaben x_1, x_2, ... x_7 für R_1, R_2, Z_3, Z_4, Z_5, E_6, E_7) produziert wird.

Da die Fertigungsstufen nicht klar voneinander getrennt werden können, wird eine Verflechtungsmatrix für den gesamten Graphen aufgestellt.
Eine aufsteigende Nummerierung, die bei den Rohstoffen beginnt, erhöht die Übersicht.

Für die Anzahlen der Mengeneinheiten ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2x_3 + x_4 \\
x_2 &= 3x_3 + 5x_5 + 8x_7 \\
x_3 &= 6x_6 + 7x_7 \\
x_4 &= 5x_6 + 4x_7 \\
x_5 &= 2x_7 + 50 \\
x_6 &= 100 \\
x_7 &= 150
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist zu lösen.
Mit Matrizen kann dies wieder einprägsam erfolgen.
Jede Spalte der Verflechtungsmatrix gibt erneut für ein Produkt die zur Herstellung benötigten Mengeneinheiten der übrigen Produkte, d. h. also die Zutatenliste, an.

	R_1	R_2	Z_3	Z_4	Z_5	E_6	E_7
R_1	0	0	2	1	0	0	0
R_2	0	0	3	0	5	0	8
Z_3	0	0	0	0	0	6	7
Z_4	0	0	0	0	0	5	4
Z_5	0	0	0	0	0	0	2
E_6	0	0	0	0	0	0	0
E_7	0	0	0	0	0	0	0

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(E-T)\cdot\vec{x} &= \vec{y} \\
\Longleftrightarrow \qquad \vec{x} &= (E-T)^{-1}\cdot\vec{y}
\end{aligned}
\qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4400 \\ 7900 \\ 1650 \\ 1100 \\ 350 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ E_6 \\ E_7 \end{pmatrix}$$

Gozintograph (goes into) nach A.Vazsonyi

Stücklistenproblem, Ergänzungen

1. Die umgeformte Beziehung,

$$\begin{aligned} (E-T)\cdot\vec{x} &= \vec{y} \\ \iff \quad \vec{x}-T\cdot\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned}$$

die auch dem Gleichungssystem direkt entspricht, kann unmittelbar eingesehen werden.
Für den Stücklisten- oder auch Produktionsvektor $\vec{x}$ gibt der Vektor $T\cdot\vec{x}$ den notwendigen (internen) Bedarf an Rohstoffen und Zwischenprodukten an.

Der Outputvektor $\vec{y}$ ergibt sich dann als Differenz: $\vec{y} = \vec{x} - T\cdot\vec{x}$.

2. Bei der gewählten Anordnung (Nummerierung) besitzt die Verflechtungsmatrix T in unserem Beispiel nur oberhalb der sogenannten Hauptdiagonalen von null verschiedene Elemente.

T^2 enthält mehr Nullen als T , T^3 besteht nur aus Nullen. Daher gilt die Beziehung:

$$\begin{aligned} (E+T+T^2)\cdot(E-T) &= E \\ \overset{\text{Multiplikation von rechts mit } \vec{x}}{\Longrightarrow} \quad \vec{y}+T\cdot\vec{y}+T^2\cdot\vec{y} &= \vec{x} \end{aligned}$$

Auch diese Darstellung kann anschaulich interpretiert werden.

Nehmen wir zunächst an, dass ein zweistufiger Produktionsprozess vorliegt und der Outputvektor $\vec{y}$ nur die Anzahl der Endprodukte vorschreibt.

Dann gibt der Vektor $T\cdot\vec{y}$ den Bedarf an Zwischenprodukten und $T^2\cdot\vec{y} = T\cdot(T\cdot\vec{y})$ den Bedarf an Rohstoffen an.
Diese Überlegung kann auf den allgemeinen Fall leicht abgewandelt übertragen werden.