Determinanten

Wir entwickeln eine Lösungsformel für Gleichungssysteme mit zwei Variablen.

$$\begin{array}{rcrcrl} ax & + & cy & = & e & \mid \cdot(-b) \\ bx & + & dy & = & f & \mid \cdot a \\ \hline -abx & - & bcy & = & -be & \\ abx & + & ady & = & af & \end{array}\Bigg\}+$$

$$y(ad-bc) = af-be$$

$$y = \frac{af-be}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \qquad \text{analog} \qquad x = \frac{ed-cf}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$$

Man schreibt $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ *für den Term* $ad-bc$ *und nennt das Zahlenschema bzw. seinen Wert Determinante.*

Welche Regelmäßigkeit ist in der Determinantenschreibweise der Lösung enthalten?
Diese Überlegungen können auf n Gleichungen mit n Variablen verallgemeinert werden. Der Fall $n = 3$ soll hier noch behandelt werden.

Hierzu schreiben wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}$$

als Vektorgleichung:

$$\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{d} \quad \mid \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

und erhalten unmittelbar

$$x = \frac{\vec{d}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$$

$$y = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{d}\times\vec{c})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$$

$$z = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{d})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$$

Man schreibt $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ *für das Produkt* $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ *und nennt das Zahlenschema bzw. seinen Wert Determinante.*

Erläutere und beweise die Berechnungsmethode (eine unter vielen) für Determinanten:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - & - & - & & \end{array} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$