Aufgaben, gemischt

1. Die Ebene E ist gegeben durch die Punkte $A(0 \mid -2 \mid 1)$, $B(-1 \mid 0 \mid 2)$ und $C(1 \mid 1 \mid 0)$.
   Wie groß ist der Abstand von E zum Ursprung?

2. Wie groß ist der Abstand von $Q(1 \mid 0 \mid -1)$ zur Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

3. In einem Betrieb sind 200 Personen beschäftigt.
   Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person am Tag krank ist, beträgt 5 %.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind täglich
   a) höchstens 4 Personen,
   b) zwischen 7 und 13 (Grenzen eingeschlossen),
   c) mindestens 16 Personen krank?

4. Die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen einen Spat auf,

   dessen Volumen 10 VE beträgt. Wie groß ist dann a?

5. Wir testen die Hypothesen auf dem 5 %-Niveau. Wie lautet der Ablehnungsbereich?
   (Binomialverteilung, $n = 200$)
   a) $p \geq 0{,}4$
   b) $p \leq 0{,}6$
   c) $p = 0{,}5$ (beidseitig)

6. In der Gesamtbevölkerung leiden (höchstens) 15 % aller Kinder an einer Hausstaub-Allergie, im Folgenden kurz als allergisch bezeichnet.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 300 zufällig ausgewählten Kindern
      i) mindestens 60 ii) höchstens 35 an dieser Allergie leiden?
   b) Wie groß muss die Anzahl einer Kindergruppe mindestens sein, damit mit mindestens 95 %iger Wahrscheinlichkeit sich mindestens ein allergisches Kind in der Gruppe befindet?
   c) Einige Ärzte vermuten, dass sich der Anteil 15 % allergischer Kinder vergrößert hat und wollen dies durch einen Test anhand 300 Kinder belegen. Entwickeln sie einen geeigneten Test auf dem 5 %-Niveau.

Lösungen

1. $E\colon \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0,$ HNF, $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Fußpunkt $F(-1 \mid 2 \mid -1)$, $d(Q, g) = \sqrt{8}$

3. a) 2,6 %
   b) 74,6 %
   c) 4,4 %

4. $a = 5$

5. a) $\overline{A} = \{0, \ldots, 68\}$
   b) $\overline{A} = \{132, \ldots, 200\}$
   c) $\overline{A} = \{0, \ldots, 85\} \cup \{115, \ldots, 200\}$

6. a) i) 1,2 % ii) 5,9 %
   b) $n = 19$
   c) $H_0\colon p \leq 15\,\%$, $\overline{A} = \{56, \ldots, 300\}$
   Binomial- oder Normalverteilung

Aufgaben, gemischt

7. Wir testen die Hypothesen auf dem 5 %-Niveau. Wie lautet der Ablehnungsbereich?
(Binomialverteilung, $n = 2000$, Näherung mit Normalverteilung, ohne Stetigkeitskorrektur)

   a) $p \geq 0{,}20$

   b) $p \leq 0{,}35$

8. X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 100$ und $\sigma = 10$.
Für $Z = X + X + X + X + X$ (Summanden unabhängig voneinander) ist $P(Z > 550)$ zu ermitteln.
Beachten Sie: $V(X + X) = V(X) + V(X)$.

Lösungen:

7. a) $\mu = 400$
$\sigma = 17{,}89$
$\overline{A} = \{0, \ldots, 370\}$

   b) $\mu = 700$
$\sigma = 21{,}33$
$\overline{A} = \{736, \ldots, 2000\}$

8. $\mu = 500$
$\sigma = \sqrt{5} \cdot 10$
$P(Z > 550) = 1{,}3\,\%$

9. Gegeben ist die Ebenenschar $E_t: \quad (t-4)x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 2t = 0, \quad t \in \mathbb{R}$,

und die Gerade $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Für welchen Wert von t ist E_t parallel zu g?

b) Die Ebene E^* geht durch den Punkt $P(2 \mid 1 \mid 11)$ und ist parallel zu E_7.
Ermitteln Sie eine Normalengleichung von E^* und berechnen Sie den Abstand von E_7 und E^*.

c) Zeigen Sie: Es gibt genau eine Ebene aus der Schar E_t, die auf keiner anderen Ebene der Schar senkrecht steht. Wie lautet ihre Gleichung?

Lösungshinweise

9. a) $t = -4$

b) E^*: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 70 = 0$

$d = 8$

c) $(t-4) \cdot (k-4) + 40 = 0$

$t = 4$

10. Gegeben ist die Ebenenschar $E_k\colon\ 4x + 2y + kz = 4k$ mit $k > 0$.

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

b) Jede Ebene der Schar schließt mit den Koordinatenebenen eine Pyramide ein.
Für welches k beträgt das Pyramidenvolumen $V = 12\ VE$?

c) Untersuchen Sie, ob die Ebenen der Schar gemeinsame Punkte haben (Anschauung ist möglich) und falls ja, erfassen Sie diese Punkte vektoriell.

d) An welche Ebene (Normalenform) nähern sich die Ebenen E_k an, falls k gegen Unendlich strebt? Begründen Sie dies auch algebraisch *(Tipp: Ebenengleichung durch k dividieren)*.

Lösungshinweise

10. a) $A(k\,|\,0\,|\,0),\quad B(0\,|\,2k\,|\,0),\quad C(0\,|\,0\,|\,4)$

b) $V_{\text{Quader}} = 8k^2,\quad V_{\text{Pyramide}} = \frac{4}{3}\,k^2,\quad k = 3$

c) $h\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $z = 4$

11. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Ebenenschar E_a gegeben durch $E_a:\ ax + (8-a)y + 8z - 4 = 0$.

Die Gerade g hat die Gleichung $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie a so, dass g orthogonal zu E_a ist.
Zeigen Sie, dass g für keinen Wert von a parallel zu E_a verläuft.
Für welchen Wert von a ist der Winkel zwischen g und E_a $30°$?

b) Welche Beziehung besteht zwischen a und a^*, wenn E_a und E_{a^*} orthogonal zueinander sind?

c) Für welche Werte von a beträgt der Abstand des Ursprungs zu E_a $\frac{1}{8}\sqrt{8}$ LE?
Welche Ebene der Schar hat vom Ursprung den maximalen Abstand?

Lösungshinweise

11. a) $a = 4$
Der Richtungsvektor von g ist für kein a orthogonal zum Normalenvektor der Ebene E_a.
$\sin\alpha = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}||\vec{u}|} \right| \iff \frac{24}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2a^2 - 16a + 128}} = \frac{1}{2}$
$a_1 = 16, \quad a_2 = -8$

b) $a = \frac{4a^* - 64}{a^* - 4}, \quad a^* \neq 4$

c) HNF
$\frac{4}{\sqrt{2a^2 - 16a + 128}} = \frac{1}{8}\sqrt{8}$
$a_1 = 0, \quad a_2 = 8$

Maximum von $d(a) = \frac{4}{\sqrt{2a^2 - 16a + 128}}$ an der Stelle $a = 4$, also E_4