

Aufgaben Vektorrechnung

1. Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $M(2 \mid 4 \mid 2)$.

- a) Wie lautet die Gleichung in Koordinatenform der Ebene E_1 , die g und M enthält? Fälle von M das Lot auf g . Gib die Koordinaten des Lotfupunktes L an. Berechne die Länge d des Lotes.
(zur Kontrolle: $E_1: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$, $L(3 \mid 6 \mid 0)$)
- b) Bestimme diejenigen Punkte A und B auf g , die von L die Entfernung d haben. Bestimme weiter die Punkte C und D so, dass $ABCD$ ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M darstellt.
(zur Kontrolle: $A(5 \mid 4 \mid -1)$, $B(1 \mid 8 \mid 1)$, $C(-1 \mid 4 \mid 5)$, $D(3 \mid 0 \mid 3)$)
- c) ber dem Quadrat $ABCD$ wird eine senkrechte Pyramide errichtet. Eine Seitenfläche der Pyramide liegt in der Ebene E_2 , die von der Gerade g und dem Punkt $P(5 \mid 6 \mid 4)$ aufgespannt wird. Berechne die Koordinaten der Pyramidenspitze S und die Höhe der Pyramide.
(zur Kontrolle: $S(6 \mid 6 \mid 6)$)

Aufgaben Vektorrechnung

1. Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $M(2 | 4 | 2)$.

- a) Wie lautet die Gleichung in Normalenform der Ebene E_1 , die g und M enthält? Fälle von M das Lot auf g . Gib die Koordinaten des Lotfupunktes L an. Berechne die Länge d des Lotes.

(zur Kontrolle: $E_1: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0 \quad L(3 | 6 | 0)$)

- b) Bestimme diejenigen Punkte A und B auf g , die von L die Entfernung d haben. Bestimme weiter die Punkte C und D so, dass $ABCD$ ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M darstellt.

(zur Kontrolle: $A(5 | 4 | -1), B(1 | 8 | 1), C(-1 | 4 | 5), D(3 | 0 | 3)$)

- c) ber dem Quadrat $ABCD$ wird eine senkrechte Pyramide errichtet. Eine Seitenfläche der Pyramide liegt in der Ebene E_2 , die von der Gerade g und dem Punkt $P(5 | 6 | 4)$ aufgespannt wird. Berechne die Koordinaten der Pyramidenspitze S und die Höhe der Pyramide.

(zur Kontrolle: $S(6 | 6 | 6)$)

1. a) E_3 ist eine Ebene, die senkrecht zu g und durch den Punkt M verläuft.

$E_3: \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0$. Diese Ebene wird mit g geschnitten, es ergibt sich für $\lambda = 1$ der Punkt L .

d ist die Länge des Vektors \vec{ML} , $|\vec{ML}| = 3$

- b) Zunächst ist der Einheitsvektor des Richtungsvektors der Geraden g zu bilden. Das Dreifache dieses Einheitsvektors ist zu \vec{OL} zu addieren, bzw. zu subtrahieren.

$\vec{u}^\circ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{OB} = \vec{OL} + 3 \cdot \vec{u}^\circ, \quad \vec{OA} = \vec{OL} - 3 \cdot \vec{u}^\circ$

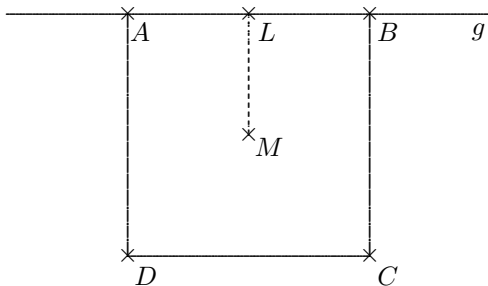
$\vec{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$

die Bezeichnungen A und B können auch vertauscht sein.

$\vec{OD} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{LM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{OC} = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{LM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$

- c) $E_2: \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 42 = 0$. Diese Ebene wird mit der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ geschnitten, es

ergibt sich für $\lambda = 2$ der Punkt S . Der Stützvektor von h ist \vec{OM} , der Richtungsvektor ist der Normalenvektor von E_1 .



Aufgaben Vektorrechnung

2. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3 \mid -2 \mid 1)$, $B(3 \mid 3 \mid 1)$ und $C(6 \mid 3 \mid 5)$ gegeben.
- Stellen Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A , B und C in Normalenform auf.
 - Begründen Sie durch eine Rechnung:
Ein weiterer Punkt D kann so gewählt werden, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten von D .
 - Weiterhin ist eine Gerade g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben.
Zeigen Sie, dass g parallel zu E verläuft.
 - Welchen Abstand hat g zu E ?
 - Berechnen Sie den Schnittpunkt F der Diagonalen des Quadrats.
 - Zeigen Sie: Die Senkrechte zur Ebene E durch F schneidet die Gerade g .

Lösungshinweise:

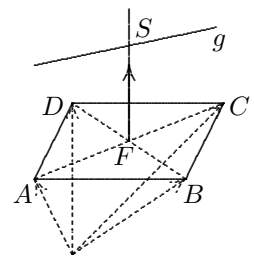
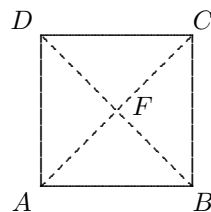
2. a) Ein Normalenvektor (Vektorprodukt der Richtungsvektoren) lautet: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

die Normalenform lautet: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{x} - 9 = 0$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$

$|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = 5 \quad \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

$D(6 \mid -2 \mid 5)$



- c) Der Richtungsvektor der Geraden steht senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

- d) Stützvektor der Geraden in die Hessesche Normalenform von E einsetzen, $d = 7,5$

e) $\vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) \quad F(4,5 \mid 0,5 \mid 3)$

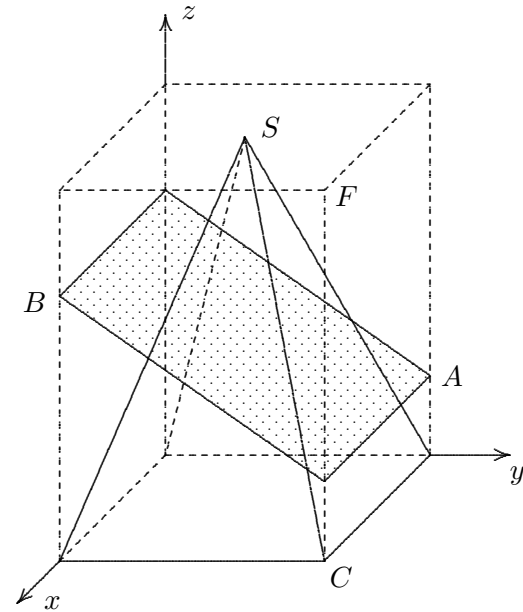
- f) Die Senkrechte durch F (Richtungsvektor ist der Normalenvektor der Ebene) schneidet die Gerade g in $S(-1,5 \mid 0,5 \mid 7,5)$.

Aufgaben Vektorrechnung

3. Gegeben ist der Punkt $F(6 \mid 8 \mid 12)$.

B ist 4 Einheiten vom Quaderdeckel entfernt, A ist 3 Einheiten vom Quaderboden entfernt.

- a) Zeichne die Schnittfläche von der senkrechten Pyramide und der Ebene E ein, in der A und B liegen, 2 gegenüberliegende Kanten sind parallel zu 2 Quaderkanten.
- b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden CS und der Ebene E .
- c) Bestimme die Schnittgerade der vorderen Pyramidenfläche und der Ebene E .
- d) Bestimme den Winkel α , den die vordere Pyramidenfläche mit der xy -Ebene einschließt.
- e) Bestimme den Winkel β , den die Pyramidenflächen miteinander einschließen.
- f) Wie groß ist das Volumen der Pyramide?



Lösungshinweise:

3. a)

$$\text{b) } E : 5y + 8z - 64 = 0, \quad \lambda = \frac{13}{19}, \quad \vec{OS}^* = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 96 \\ 128 \\ 72 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) vordere Pyramidenfläche: } \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 24 = 0, \quad \text{Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 64 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 32 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \alpha = 76,0^\circ$$

$$\text{e) seitliche Pyramidenfläche: } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 24 = 0, \quad \alpha = 85,6^\circ$$

Aufgaben Vektorrechnung

4. Die Punkte $O(0 | 0 | 0)$, $A(8 | 0 | 0)$, $B(0 | 4 | 0)$ und $C_k(0 | k | 6)$ sind die Eckpunkte der Pyramidenschar $OABC_k$.
- a) Es wird die Pyramide $OABC_0$ betrachtet.
Zeichnen Sie ein Schrägbild dieser Pyramide.
Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC_0 , den Schnittwinkel der Fläche ABC_0 mit der x_1x_2 -Ebene und den Abstand dieser Ebene vom Ursprung.
- b) Es wird die Pyramidenschar $OABC_k$ betrachtet.
Ermitteln Sie die Einsetzungen für k , für die das Dreieck ABC_k gleichschenkelig mit der Spitze C_k ist.
Untersuchen Sie die Größe des Pyramidenvolumens allgemein in Abhängigkeit von k und erläutern Sie Ihr Ergebnis. Wo liegen alle Punkte C_k ?
- c) Behauptung: Wenn ein Vektor \vec{a} sowohl zu einem Vektor \vec{b} als auch zu einem Vektor \vec{c} senkrecht steht, so steht der Vektor \vec{a} auch senkrecht zum Summenvektor $\vec{b} + \vec{c}$.
Erläutern und beweisen Sie die Behauptung.
Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung der Behauptung.

Lösungshinweise:

4. a) Innenwinkel: $\alpha = 44,3^\circ$, $\beta = 75,6^\circ$, $\gamma = 60,1^\circ$

Normalenform der Ebene: $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 24 = 0$, Schnittwinkel $59,2^\circ$, Abstand zum Ursprung

$$d = \frac{24}{\sqrt{61}}$$

- b) Dreieck ABC_k gleichschenkelig für $k = -6$
c) Pyramidenvolumen $32 VE$

Aufgaben Vektorrechnung

5. Gegeben sind die Gerade g , die Ebene E und die Kugel K durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right]^2 = 169,$$

$$E: 4x_1 - 3x_2 + 12x_3 + 60 = 0.$$

a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und E .

Weise nach, dass S außerhalb der Kugel K liegt.

Zeige, dass E eine Tangentialebene von K ist.

Berechne die Koordinaten des Berührungspunktes B .

b) Die Ebene E_1 geht durch den Mittelpunkt M von K und ist orthogonal zu g .

Stelle die Gleichung von E_1 auf.

Berechne den Abstand des Punktes M von g .

Was folgt hieraus für die gegenseitige Lage von g und K ?

c) Zeige, dass die Ebene $E_2: \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 36$ die Kugel K schneidet.

Berechne für den Schnittkreis den Radius und die Koordinaten des Mittelpunktes.

Lösungshinweise:

5. a) $S\left(4 \mid -\frac{4}{3} \mid -\frac{20}{3}\right), \quad B(0 \mid 4 \mid -4)$

b) $d(M, g) = 13$

c) $r^* = 12, \quad M^*\left(\frac{16}{9} \mid \frac{4}{9} \mid \frac{32}{9}\right)$

Aufgaben Vektorrechnung

6. Gegeben sind die beiden Geraden g und h :

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie den Schnittpunkt von g und h .
- b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen g und h .
- c) Wie lautet die Gleichung der Ebene E_1 in Normalenform, in der die Geraden g und h liegen? Wie groß ist der Abstand der Ebene E_1 zum Ursprung?
- d) Wie lautet die Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform, in der die Punkte $P(0|2|1)$ und $Q(2|3|2)$ liegen und die senkrecht zu E_1 steht?
- e) Die Ebene $E_3: -10x - 5y + 10z = -9$ ist eine Tangentialebene einer Kugel K , deren Mittelpunkt $M(\frac{5}{2} | 1 | \frac{18}{5})$ ist. In welchem Punkt berührt die Kugel die Ebene E_3 und wie groß ist der Radius der Kugel?
- f) Wie kann ohne einen Schnittpunkt zu berechnen überprüft werden, ob zwei gegebene Geraden eine Ebene bestimmen, d. h. in einer Ebene liegen?

6. *Lösungen:*

a) $\lambda = -\frac{1}{4}, \quad \mu = -2, \quad S(-1 | 1 | -2),$

b) $\alpha = 71,6^\circ.$ (Es wird stets der kleinere der zwei möglichen Winkel genommen.)

c) $E_1: -2x - y + 2z = -3, \quad d = 1$

d) $E_2: \vec{x} = \vec{OP} + \lambda(\vec{OP} - \vec{OQ}) + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E_2: x - 2y = -4$

e) Der Berührungspunkt ergibt sich als Schnittpunkt der Ebene E_3 mit einer Geraden, die durch M verläuft und die als Richtungsvektor den Normalenvektor von E_3 hat.

$$\lambda = -\frac{1}{15}, \quad B\left(\frac{19}{6} \mid \frac{4}{3} \mid \frac{44}{15}\right), \quad d = 1$$

f) Falls die Geraden nicht parallel sind, müsste der Vektor, der sich als Differenz der beiden Stützvektoren ergibt, komplanar mit den beiden Richtungsvektoren sein, d.h. er müßte eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren sein. Man sagt auch, dass der Differenzvektor und die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Aufgaben Vektorrechnung Bayern Abitur 2002

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(6|0|0)$, $B(6|6|6)$, die Ebene $F: x_1 - x_2 = 0$ und die Ebenenschar $G_k: kx_1 + 6x_2 - 6k = 0$ mit $k > 0$ gegeben.
- a) Bestimmen Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E , die die Punkte A , B und O enthält. Weisen Sie nach, dass das Dreieck OAB bei A rechtwinklig ist.
(mögliches Teilergebnis $E: x_2 - x_3 = 0$)
- b) Alle Punkte des Dreiecks OAB , für die A der nächstgelegene Eckpunkt ist, werden grün gekennzeichnet. Welcher Bruchteil der Dreiecksfläche ist dann grün gefärbt? Begründen Sie Ihre Antwort anhand einer Skizze.
- c) Durch die Spiegelung der Ebene E aus Teilaufgabe 1a) an der Ebene F erhält man die Ebene E^* . Begründen Sie, dass B und O Fixpunkte dieser Spiegelung sind. Ermitteln Sie für E^* eine Gleichung in Normalenform.
(mögliches Teilergebnis $E^*: x_1 - x_3 = 0$)
2. a) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und E^* sowie den Schnittwinkel φ von E und E^* an.
- b) Bestimmen Sie - soweit vorhanden - die Koordinaten der Schnittpunkte der Scharebenen G_k mit den Koordinatenachsen. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat jede Scharebene G_k ?
- c) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass alle Scharebenen G_k eine gemeinsame Schnittgerade g haben, und geben Sie eine Gleichung von g an.
3. Für jedes $k > 0$ begrenzen die Ebenen E , E^* , G_k und die x_1x_2 -Ebene eine dreiseitige Pyramide P_k .
- a) Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte von P_k an und berechnen Sie das Pyramidenvolumen V_k in Abhängigkeit von k .
- b) Für welches k ist F Symmetrieebene von P_k ? Geben Sie eine kurze Begründung.

zur Kontrolle:

2. a) $\varphi = 60^\circ$

3. a) $\vec{OS} = \frac{6k}{6+k} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, S Pyramidenspitze

$$V_k = \frac{6k^2}{6+k}$$

Eine gute geometrische Vorstellung erleichtert in dieser anspruchsvollen Aufgabe Vieles.

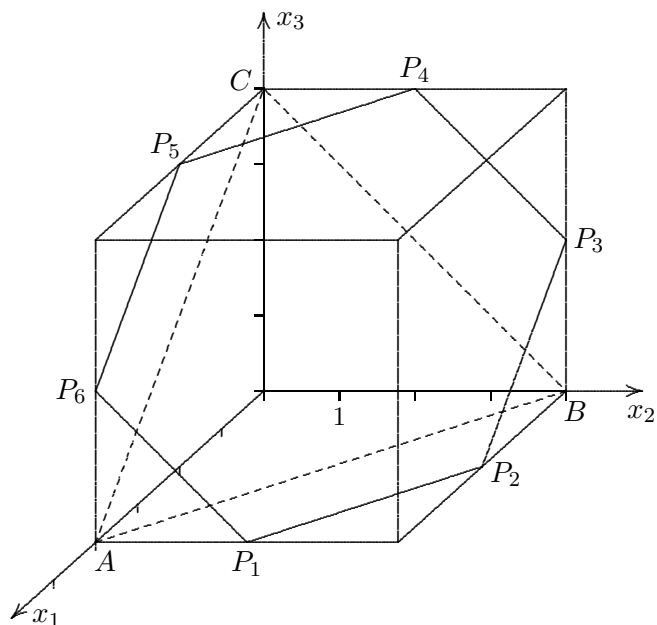
Würfelaufgabe

7. Die Punkte $O(0 | 0 | 0)$, $A(4 | 0 | 0)$, $B(0 | 4 | 0)$, $C(0 | 0 | 4)$, $F(4 | 4 | 4)$ sind Eckpunkte eines Würfels.
- Die Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 6$ schneidet den Würfel in einem Sechseck.
Zeichnen Sie den Würfel und das Sechseck in ein Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC und das Sechseck den gleichen Umfang haben.
 - Für welche Werte von a schneidet die Ebenenschar $E_a: x_1 + x_2 + x_3 = a$ den Würfel?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Ecken der Schnittfigur und den Werten von a ?
 - Gibt es Ebenen außerhalb der Schar E_a , die den Würfel in einem Fünfeck schneiden?

Würfelaufgabe Lösungen

7. Die Punkte $O(0|0|0)$, $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$, $C(0|0|4)$, $F(4|4|4)$ sind Eckpunkte eines Würfels.

- a) Die Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 6$ schneidet den Würfel in einem Sechseck.
 Zeichnen Sie den Würfel und das Sechseck in ein Koordinatensystem.
 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC und das Sechseck den gleichen Umfang haben.



$x_1 = 4$ und $x_3 = 0$ ergibt $x_2 = 2$, $P_1(4|2|0)$
 $x_2 = 4$ und $x_3 = 0$ ergibt $x_1 = 2$, $P_2(2|4|0)$
 analog $P_3(0|4|2)$, $P_4(0|4|2)$, $P_5(2|0|4)$, $P_6(4|0|2)$
 regelmäßiges Sechseck, Seitenlänge $a_1 = 2\sqrt{2}$, Umfang $U_1 = 12\sqrt{2}$
 gleichseitiges Dreieck, Seitenlänge $a_2 = 4\sqrt{2}$, Umfang $U_2 = 12\sqrt{2}$

- b) Für welche Werte von a schneidet die Ebenenschar $E_a: x_1 + x_2 + x_3 = a$ den Würfel?
 Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Ecken der Schnittfigur und den Werten von a ?

Grenzfälle: $O \in E_a$ für $a = 0$, $F \in E_a$ für $a = 12$
 für $0 \leq a \leq 12$ wird der Würfel geschnitten
 Dreieck für $0 < a \leq 4$ und für $8 \leq a < 12$
 gestricheltes Dreieck für $a = 4$
 Dreieck für $a = 8$ mit den Eckpunkten $D(0|4|4)$, $G(0|4|4)$, $H(4|0|4)$
 Sechseck für $4 < a < 8$

- c) Gibt es Ebenen außerhalb der Schar E_a , die den Würfel in einem Fünfeck schneiden?

mögliche Lösungen:

Ebene, die das gezeichnete Sechseck enthält, um die Achse P_1P_2 drehen,
 so dass P_5 und P_4 in den Punkt C oder einen anderen Punkt
 auf der Strecke \overline{OC} (ungleich O) übergehen.

Flugrouten GTR

8. Ein Sportflugzeug und ein Militärflugzeug befinden sich auf geradlinigem Kurs. Im örtlichen Koordinatensystem der Flugsicherungsstelle gelten folgende Angaben: Das Sportflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A(30 | 0 | 2)$ (Längen in km , Zeiten in h),

der Geschwindigkeitsvektor lautet: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -100 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für das Militärflugzeug lauten

die entsprechenden Angaben $B(-20 | -10 | 1)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 350 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugrouten.
- Bestimmen Sie die kleinste Entfernung beider Flugzeuge.

9. Variation der obigen Aufgabe:

Das Sportflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A(10 | 0 | 3)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -60 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Für das Militärflugzeug lauten
die entsprechenden Angaben $B(-40 | -20 | 2)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Flugrouten GTR Lösungen

8. Ein Sportflugzeug und ein Militärflugzeug befinden sich auf geradlinigem Kurs. Im örtlichen Koordinatensystem der Flugsicherungsstelle gelten folgende Angaben: Das Sportflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A(30 | 0 | 2)$ (Längen in km , Zeiten in h),

der Geschwindigkeitsvektor lautet: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -100 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für das Militärflugzeug lauten

die entsprechenden Angaben $B(-20 | -10 | 1)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 350 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugrouten. 0,125 km

b) Bestimmen Sie die kleinste Entfernung beider Flugzeuge. 13,417 km nach 0,22 h

$$d(t) = \sqrt{(50 - 200t)^2 + (10 - 100t)^2 + (1 - 5t)^2}$$

9. Variation der obigen Aufgabe:

Das Sportflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $A(10 | 0 | 3)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -60 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für das Militärflugzeug lauten

die entsprechenden Angaben $B(-40 | -20 | 2)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Abstand der beiden Flugrouten 0,723 km

b) kleinste Entfernung beider Flugzeuge 1,056 km nach 0,14 h

$$d(t) = \sqrt{(50 - 360t)^2 + (20 - 150t)^2 + (1 - 2t)^2}$$

Flugbahnen

10. In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1 - x_2 -Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1 -Achse weise in die Ostrichtung und die x_2 -Achse in die Nordrichtung. Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10,5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden h : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7,2 \\ -9,6 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Längeneinheit ist 1 km .

- a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.
Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt.
Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebeort P .
Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1 .
- b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km . In welcher Höhe taucht F_1 in die Wolkendecke ein?
Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.
Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet.
Ist dieses der Abstand der beiden Flugbahnen?
- c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R(-10,2 | -13,6 | 0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius 85 km .
Wie viele Kilometer fliegt das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars?
- d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte $G_1(84 | -3 | 0)$ und $G_2(12 | -99 | 0)$.
Welchen maximalen Abstand von der Grenze hat ein Punkt im Nachbarland, der vom Radar noch erfasst wird? (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

Flugbahnen Lösungshinweise

10. In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1 - x_2 -Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1 -Achse weise in die Ostrichtung und die x_2 -Achse in die Nordrichtung. Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10,5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden h : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7,2 \\ -9,6 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Längeneinheit ist 1 km .

- a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.

F_1 : zwischen NO und N , setze z -Koordinate 0

F_2 : zwischen SO und O

Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt.

Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P .

$$x_3 = 6 \implies \lambda = \frac{1}{2}, Z(0 | 0 | 0)$$

$$P(-10,5 | -14 | 0), \quad 17,5 \text{ km}$$

Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1 .

$18,9^\circ$

- b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km . In welcher Höhe taucht F_1 in die Wolkendecke ein?

12 km

Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.

Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet.

Ist dieses der Abstand der beiden Flugbahnen?

$$H_1(-7,2 | -9,6 | 1,9)$$

$$H_2(-7,2 | -9,6 | 12)$$

$$d = 10,1 \text{ km} \quad \text{nein}$$

- c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R(-10,2 | -13,6 | 0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius 85 km .

Wie viele Kilometer fliegt das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars?

$$\lambda_{1/2} = \pm 16,8$$

$$168 \text{ km}$$

- d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte $G_1(84 | -3 | 0)$ und $G_2(12 | -99 | 0)$.

Welchen maximalen Abstand von der Grenze hat ein Punkt im Nachbarland, der vom Radar noch erfasst wird? (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

R ist von der Grenze 69 km entfernt.

Der maximale Abstand beträgt 16 km .

11. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Eckpunkte $A(4|4|0)$, $B(2|7|1)$, $C(0|4|0)$ der dreieckigen Grundfläche einer Pyramide und deren Spitze $S_k(-2k|5+3k|7+k)$ gegeben.
- a) Geben Sie die Normalenform der Ebene E an, in der die Grundfläche ABC liegt. Berechnen Sie den Winkel, den die Grundfläche mit der xy -Ebene einschließt. Untersuchen Sie, ob die Punkte S_k auf einer Geraden liegen und bestimmen Sie das Volumen der Pyramide $ABC S_k$. Was kann aus dem Ergebnis geschlossen werden?
- b) Ermitteln Sie für die Pyramide mit der Spitze S_{-1} den Lotfußpunkt L (die Strecke LS_{-1} steht senkrecht auf der Ebene, in der die Grundfläche der Pyramide liegt) und untersuchen Sie,
- 1) ob der Lotfußpunkt L in der Grundfläche der Pyramide liegt,
 - 2) ob diese Pyramide eine Symmetrieebene hat.
- c) Die Punkte A , C und S_k liegen für ein festes k in einer Ebene E_k . Geben Sie die Normalengleichung der Ebenenschar E_k an. Untersuchen Sie, welche Punkte die Ebenenschar gemeinsam hat. Welche Ebene ergibt sich, falls k gegen Unendlich strebt? Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Beantwortung der Frage, ob E_1 die Pyramide mit der Spitze S_{-1} in zwei volumengleiche Teile zerlegt.
- d) Die Pyramide mit der Spitze S_{-1} soll um die Achse AC gedreht werden, so dass die Spitze in der xz -Ebene liegt. Bestimmen Sie den Drehwinkel.

Drehpyramide Lösungshinweise

11. a) Normalenform $E: \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 4 = 0$, Winkel, den die Ebenen einschließen: $\alpha = 18,4^\circ$

$$\vec{OS}_k = \begin{pmatrix} -2k \\ 5 + 3k \\ 7 + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \text{Die Punkte } S_k \text{ liegen auf einer Geraden.}$$

Volumen $V_{Pyramide} = \frac{80}{6} \text{ VE}$ (mit dem Spatprodukt)

b) Der Lotfußpunkt $L(2 | 4 | 0)$ ergibt sich als Schnitt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E .

Durch die Lage des Lotfußpunkts ergibt sich die Symmetrieebene durch L , B und S_1 .

c) Normalenform der Ebenenschar $E_k: \begin{pmatrix} 0 \\ 7 + k \\ -1 - 3k \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 28 - 4k = 0$,

Die Ebenen der Schar drehen sich um die Gerade AC .

Für $k \rightarrow \infty$ ergibt sich die Ebene E .

Ein Lösungsweg wäre, die Ebene E_1 mit der Geraden BS_{-1} zum Schnitt zu bringen, um alle benötigten Vektoren für zwei Volumenberechnungen mithilfe des Spatprodukts zu erhalten.

d) Es ist $|\vec{LS}_{-1}| = \sqrt{40}$, \vec{LS}_{-1} bildet mit der xy -Ebene einen Winkel $\beta = 71,6^\circ$,
 Wird der Vektor gedreht, so dass die Spitze in der xz -Ebene liegt, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete $a = 4$ und einem Winkel $\gamma = 50,7^\circ$.
 Für den Drehwinkel ϕ gilt: $\phi = \beta - \gamma = 20,9^\circ$.

Geradenschar und Kugel

12. Gegeben sind die vier Eckpunkte $O(0|0|0)$, $A(12|0|0)$, $B(0|6|0)$ und $C(0|0|6)$ einer Pyramide,

sowie die Geradenschar $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2t-1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

- Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
- Bestimmen Sie diejenige Kugel K mit dem Mittelpunkt $O(0|0|0)$, die die Ebene E , in der die Punkte A, B, C liegen, berührt. Bestimmen Sie auch den Berührungspunkt T .
- Untersuchen Sie, ob die Geraden g_t in der Ebene E liegen. Gibt es eine Gerade der Schar, die die Kugel K aus b) tangiert?
- Gibt es eine Gerade der Schar, die die Dreiecksfläche ABC halbiert?

Geradenschar und Kugel Lösungshinweise

12. Gegeben sind die vier Eckpunkte $O(0|0|0)$, $A(12|0|0)$, $B(0|6|0)$ und $C(0|0|6)$ einer Pyramide,

sowie die Geradenschar $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2t-1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

$$V = 72 \text{ VE}$$

b) Bestimmen Sie diejenige Kugel K mit dem Mittelpunkt $O(0|0|0)$, die die Ebene E , in der die Punkte A, B, C liegen, berührt. Bestimmen Sie auch den Berührungspunkt T .

$$\begin{aligned} \vec{x}^2 &= 16 \\ E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 &= 0 \\ T\left(\frac{4}{3} \mid \frac{8}{3} \mid \frac{8}{3}\right) \end{aligned}$$

c) Untersuchen Sie, ob die Geraden g_t in der Ebene E liegen. Gibt es eine Gerade der Schar, die die Kugel K aus b) tangiert?

g_t in E enthalten.

$$g_t \text{ verl\u00e4uft durch } T, \lambda = \frac{2}{3} \implies t = 2$$

d) Gibt es eine Gerade der Schar, die die Dreiecksfl\u00e4che ABC halbiert?

$$g_t \text{ verl\u00e4uft durch } B(6|0|3), \lambda = 3 \implies t = \frac{1}{2}$$

Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 4 \mid -3)$, $B(-2 \mid 1 \mid -3)$ und $C(1 \mid -2 \mid 5)$.

1. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A , B und C ein Dreieck bilden und stellen Sie die Normalengleichung der Ebene auf, in der die Punkte liegen.
 - b) Vom Punkt $D(5 \mid -3 \mid -2)$ wird das Lot auf die Ebene $E: -4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3 = 0$ gefällt. Bestimmen Sie den Lotfußpunkt.
 - c) Der Punkt D und sein Spiegelpunkt D^* bzgl. der Ebene E (Teil b)) sowie die Punkte A , B und C bilden einen Körper. Beschreiben Sie diesen Körper und berechnen Sie sein Volumen.
 - d) Stellen Sie die Gleichungen der in der Ebene E (Teil b)) liegenden Mittelsenkrechten der Strecken \overline{AB} und \overline{BC} auf und bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten.
 - e) Zeigen Sie: Der Punkt $M(1 \mid 1 \mid 1)$ ist der Mittelpunkt der Kreislinie k , auf der die Punkte A , B und C liegen.
 - f) Die Gerade MB durchstößt die Kreislinie k (Teil e)) im Punkt B^* ein zweites Mal. Bestimmen Sie B^* und begründen Sie, dass die Dreiecke BAB^* und BCB^* rechtwinklig sind.
2. Gegeben ist die Geradenschar

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 + 3t \\ t \\ 4t - 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a) Die Aufpunkte der Geradenschar liegen selbst auf einer Geraden h . Geben Sie einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor von h an.
- b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar enthalten sind.
- c) Welche Gerade der Schar hat den minimalen Abstand vom Ursprung?

Kreislinie und Mittelsenkrechten Lösungshinweise

Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 4 \mid -3)$, $B(-2 \mid 1 \mid -3)$ und $C(1 \mid -2 \mid 5)$.

1. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A , B und C ein Dreieck bilden und stellen Sie die Normalengleichung der Ebene auf, in der die Punkte liegen.

Die Normalengleichung ist die von 1. b)
Da das Vektorprodukt nicht den Nullvektor ergibt,
liegen die Punkte nicht auf einer Geraden.

- b) Vom Punkt $D(5 \mid -3 \mid -2)$ wird das Lot auf die Ebene $E: -4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3 = 0$ gefällt. Bestimmen Sie den Lotfußpunkt.

Der Lotfußpunkt ist der Punkt M von 1. e)

- c) Der Punkt D und sein Spiegelpunkt D^* bzgl. der Ebene E (Teil b)) sowie die Punkte A , B und C bilden einen Körper. Beschreiben Sie diesen Körper und berechnen Sie sein Volumen. 82 VE

- d) Stellen Sie die Gleichungen der in der Ebene E (Teil b)) liegenden Mittelsenkrechten der Strecken \overline{AB} und \overline{BC} auf und bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten.

Die Punkte A , B , C und B^* sind die Eckpunkte eines Rechtecks,
dessen Mittelpunkt M ist. Die Mittelsenkrechten sind daher einfach zu bestimmen.

Um allgemeiner eine Senkrechte zu einer Geraden zu finden,
die auch in einer bestimmten Ebene liegt,
ist das Vektorprodukt von Richtungsvektor der Geraden und
Normalenvektor der Ebene zu bilden.

- e) Zeigen Sie: Der Punkt $M(1 \mid 1 \mid 1)$ ist der Mittelpunkt der Kreislinie k , auf der die Punkte A , B und C liegen. Radius $r = 5$

- f) Die Gerade MB durchstößt die Kreislinie k (Teil e)) im Punkt B^* ein zweites Mal. Bestimmen Sie B^* und begründen Sie, dass die Dreiecke BAB^* und BCB^* rechtwinklig sind.

Das sollte nun klar sein.

2. Gegeben ist die Geradenschar

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 + 3t \\ t \\ 4t - 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a) Die Aufpunkte der Geradenschar liegen selbst auf einer Geraden h . Geben Sie einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor von h an.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der alle Geraden der Schar enthalten sind.

$$-4x_1 + 3x_3 + 25 = 0$$

- c) Welche Gerade der Schar hat den minimalen Abstand vom Ursprung?

Da durch jeden Punkt der Ebene eine Gerade verläuft,
ist zunächst der Punkt $T(4 \mid 0 \mid -3)$ mit minimalem Abstand zum Ursprung zu bestimmen.
offensichtlich g_0

13. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem beschreiben die Punkte $A(0 | 0 | 0)$, $B(4 | -2 | 0)$, $C(0 | 6 | 0)$ die dreiseitige Grundfläche eines Prismas.

Eine Kante des Prismas ist $\overline{AD_k}$ mit $D_k(2 + k | 2 - 2k | 5)$, $k \in \mathbb{R}$.

- Ermitteln Sie die übrigen Punkte des Prismas (für allgemeines k) und sein Volumen. Was fällt Ihnen bei dem Ergebnis auf? Geben Sie hierfür eine geometrische Erklärung.
- Untersuchen Sie, ob es einen Punkt D_k gibt, so dass das Dreieck BCD_k gleichschenkelig mit der Spitze D_k ist.
- Zeigen Sie, dass es keinen Punkt D_k gibt, so dass das Prisma senkrecht ist. Das Prisma kann für allgemeines k nach zwei verschiedenen Richtungen geneigt sein. Bestimmen Sie denjenigen Punkt D_k , der diese Richtungen trennt (für diesen Punkt ist das Prisma am wenigsten schief).
- Sei nun ein gerades Prisma mit derselben Grundfläche wie das obige gegeben (die Höhe ist unwichtig). Diesem geraden Prisma wird ein Zylinder umbeschrieben. Ermitteln Sie den Mittelpunkt der Grundkreisfläche des Zylinders.

Dieses gerade Prisma soll durch eine Schnittebene, die parallel zur Prismaseitenfläche, in der die Punkte B und C liegen und die senkrecht zur xy -Ebene verläuft, halbiert werden (das Volumen wird halbiert). Beschreiben Sie nur (ohne zu rechnen), wie die Gleichung der Schnittebene ermittelt werden kann.

Prisma-Aufgabe Lösungshinweise

13. a) $E(6 + k \mid -2k \mid 5), \quad F(2 + k \mid 8 - 2k \mid 5)$

$$V = \frac{1}{2}((\vec{OB} - \vec{OA}) \times (\vec{OC} - \vec{OA})) \cdot \vec{OD}_k = \frac{1}{2}(\vec{OB} \times \vec{OC}) \cdot \vec{OD}_k = 60$$

Ergebnis ist von k unabhängig, daher liegen für verschiedene k gescherte Prismen vor.

b) Bedingung: $|\vec{OD}_k - \vec{OB}| = |\vec{OD}_k - \vec{OC}| \implies k = 0, \quad D_k(2 \mid 2 \mid 5)$

c) Es gibt kein k , so dass das zugehörige Prisma gerade ist. Die Gerade g der Punkte D_k schneidet nicht die z -Achse.

Es muss der Punkt D_k^* ermittelt werden, der von der z -Achse minimalen Abstand d hat. d ergibt sich als Abstand von $G(0 \mid 0 \mid 5)$ zu $g \implies d = \frac{6}{\sqrt{5}}, \quad D_k^*\left(\frac{12}{5} \mid \frac{6}{5} \mid 5\right)$

d) Für den Umkreis ist der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten m_1 und m_2 zu berechnen.

$$m_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad m_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M(4 \mid 3 \mid 0).$$

Ebenen-Aufgabe

1. Gegeben sind die Punkte $A(0 | 0 | -4)$, $B(4 | 0 | 0)$ und $C_t(t - 8 | t | t - 8)$, $t \in \mathbb{R}$.
- a) Zeigen Sie, dass die Punkte A , B und C_t für jedes t ein Dreieck D_t bestimmen.
Ermitteln Sie den Wert t_{\min} , für den der Flächeninhalt von D_t minimal ist.
- b) Die Punkte A , B und C_t liegen in einer Ebene E_t .
Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene E_t in Normalenform auf.
[mögliches Ergebnis $E_t: tx + 4y - tz = 4t$]
- c) Gibt es ein t , so dass E_t mit der xz -Ebene identisch ist?
- d) Für welches t hat C_t minimale Entfernung zu den Punkten der Geraden AB ?
- e) Zeigen Sie, dass die Ebenen E_t und E_{t^*} genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn gilt:
 $t \cdot t^* = -8$. Zu welcher Ebene der Schar existiert keine senkrechte Ebene in der Schar?
- f) Zwei zueinander senkrechte Ebenen E_t und E_{t^*} schneiden die y -Achse in den Punkten S_t und S_{t^*} . Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{S_t S_{t^*}}$ und ermitteln Sie, für welche Werte von t diese Streckenlänge minimal wird.

Ergebnisse:

a) $A = \sqrt{32t^2 + 256}$, $t_{\min} = 0$

b)

c) $t = 0$

d) $t = 0$, $d = \sqrt{8}$

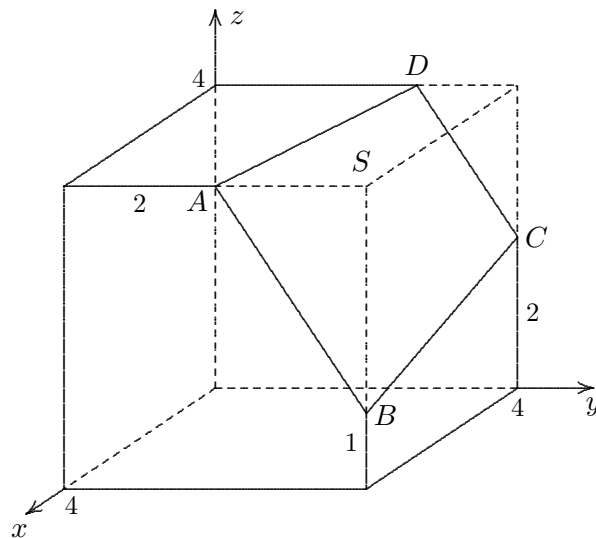
e) E_0

f) $|t + \frac{1}{t}| \rightarrow \min$, $t = \pm\sqrt{8}$

Schnittflächen-Aufgabe

Ein Würfel mit der Kantenlänge 4 LE wird von einer Ebene E , die durch die Punkte A, B, C und D verläuft, geschnitten. Ermitteln Sie

- a) die Koordinaten von D ,
- b) den Flächeninhalt der Schnittfläche,
- c) den Abstand von S zu E ,
- d) auf verschiedene Weisen das Volumen der Pyramide mit der Schnittfläche als Grundfläche und der Spitze S .



Ergebnisse:

a) $E: x + 6y + 4z = 32, \quad D(0 \mid \frac{8}{3} \mid 4)$

b) $A_{\text{Trapez}} = \frac{5\sqrt{53}}{3} \text{ FE}$

c) $d(S, E) = \frac{12}{\sqrt{53}}$.

d) $V = \frac{20}{3} \text{ VE}$

Winkel

1. Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 3 \mid 2)$ und $B(-1 \mid 8 \mid 3)$.
Untersuche, ob es einen Punkt P auf der y -Achse gibt, für den der Winkel $\angle BPA$ 90 Grad beträgt.
2. Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 2)$ und $B(0 \mid 0 \mid 8)$.
Für welchen Punkt P auf der y -Achse ist der Winkel $\angle BPA$ maximal?
3. Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 3 \mid 2)$ und $B(-1 \mid 8 \mid 3)$.
Untersuche, ob es einen Punkt P auf der y -Achse gibt, für den der Winkel $\angle BPA$ 60 Grad beträgt.

Winkel

1. Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 3 \mid 2)$ und $B(-1 \mid 8 \mid 3)$.

Untersuche, ob es einen Punkt P auf der y -Achse gibt, für den der Winkel $\angle BPA$ 90 Grad beträgt.

$$5 + (3 - y)(8 - y) = 0$$

$$y_1 = 4,382$$

$$y_2 = 6,618$$

2. Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 2)$ und $B(0 \mid 0 \mid 8)$.

Für welchen Punkt P auf der y -Achse ist der Winkel $\angle BPA$ maximal?

$$y = 4$$

3. Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 3 \mid 2)$ und $B(-1 \mid 8 \mid 3)$.

Untersuche, ob es einen Punkt P auf der y -Achse gibt, für den der Winkel $\angle BPA$ 60 Grad beträgt.

$$y_1 = 2,612$$

$$y_2 = 8,914$$