

Abstand windschiefer Geraden

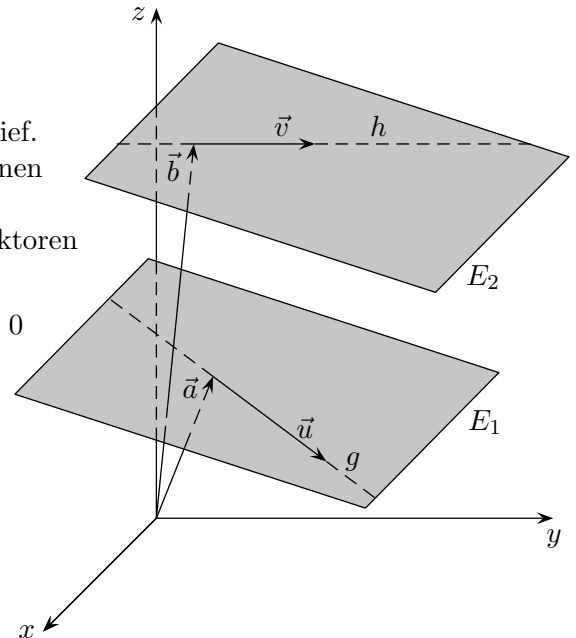
Zwei Geraden,
 $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$
 $h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$

die sich weder schneiden noch parallel verlaufen, sind windschief.
 Zu zwei windschiefen Geraden gibt es stets zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 , in denen sie verlaufen.

Als Richtungsvektoren dieser Ebenen können die Richtungsvektoren der Geraden übernommen werden.

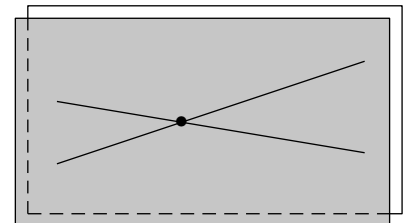
Sei $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, dann lautet die HNF von $E_1: \vec{n}^\circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
 $\implies d(g, h) = | \vec{n}^\circ (\vec{b} - \vec{a}) |$

$d(g, h)$ ist die kürzeste Entfernung der Punkte auf g zu den Punkten auf h . Hierzu betrachte man die Ebenen mit den enthaltenen Geraden senkrecht von oben, d. h. in Blickrichtung des Normalenvektors.



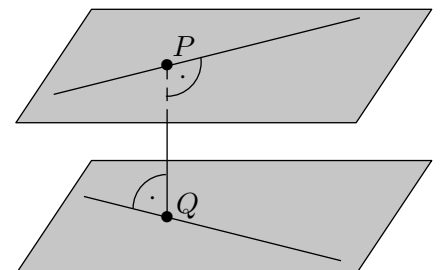
2. Beweis:

$\vec{n}^\circ (\vec{b} - \vec{a}) = | \vec{n}^\circ | \cdot | \vec{b} - \vec{a} | \cdot \cos \alpha = | d(g, h) |$ Erläutere dies.



Um die Fußpunkte P und Q zu ermitteln, sind die Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \lambda \vec{u} - \vec{b} - \mu \vec{v}) \cdot \vec{u} &= 0 \\ (\vec{a} + \lambda \vec{u} - \vec{b} - \mu \vec{v}) \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$



in die Geradengleichungen einzusetzen (der Differenzvektor steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren). Mit den Fußpunkten kann der Abstand berechnet werden.

Alternativ kann die Ebene $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{u} \times \vec{v}$ mit der Geraden $h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$ geschnitten werden.

Abstände Zusammenfassung

1. Abstand zweier Punkte P, Q

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}|$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

2. Abstand Punkt/Ebene

$$d(P, E) = |\vec{n}^\circ \vec{OP} - a|$$

\vec{OP} in HNF einsetzen.

$\vec{n}^\circ \vec{OP} - a > 0 \iff$ Ebene verläuft zwischen P und dem Ursprung.

3. Abstand Punkt/Gerade

λ mit $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{OP}) \cdot \vec{u} = 0$ berechnen.

λ in g eingesetzt ergibt den Fußpunkt F .

$$d(P, g) = |\vec{PF}|$$

oder mit GTR das Minimum der Funktion

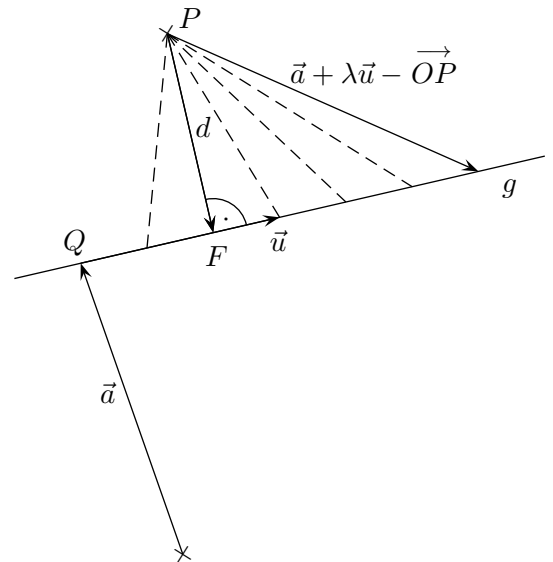
$$d(\lambda) = |\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{OP}| \text{ ermitteln.}$$

oder direkt:

$$d(P, g) = |(\vec{OP} - \vec{a}) \times \vec{u}^\circ|$$

$$d(P, g) = |\vec{QP} \times \vec{u}^\circ|$$

Tipp: Den Normierungsfaktor $\frac{1}{|\vec{u}|}$ vor den Betragsstrich ziehen.



4. Abstand paralleler Geraden siehe 3.

5. Abstand paralleler Ebenen siehe 2.

6. Abstand windschiefer Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$$

$$d(g, h) = |\vec{n}^\circ (\vec{b} - \vec{a})| \quad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

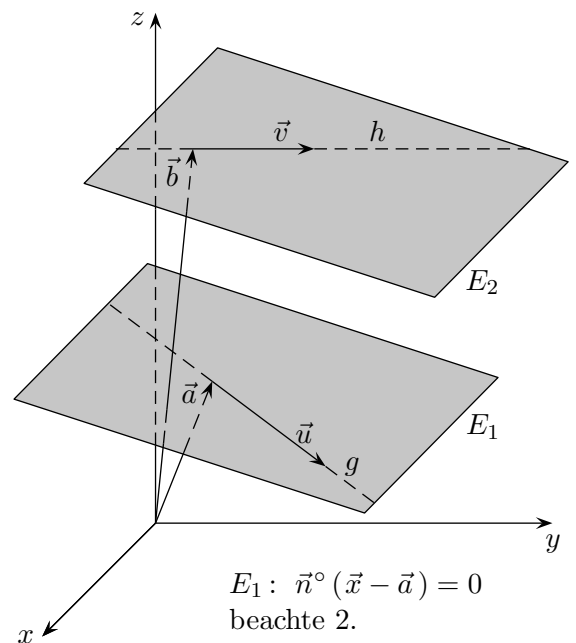
Fußpunkte und Abstand mit

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

oder die Ebene $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{u} \times \vec{v}$

mit der Geraden $h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$ schneiden.



$E_1: \vec{n}^\circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
beachte 2.

Abstände Fortsetzung

7. Welcher Punkt P auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist von $A(4 | 0 | 1)$ und $B(0 | 2 | 1)$ gleichweit entfernt?

Lösung:

Für die Punkte Q auf der Geraden g gilt: $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$

Aus der Bedingung $|\vec{AQ}| = |\vec{BQ}|$ folgt $t = -\frac{1}{2}$ und damit $P(\frac{5}{2} | 2 | -\frac{1}{2})$.

8. Welche Punkte auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben von der Ebene $E: 2x - y + 2z = 3$ den Abstand $2 LE$?

Lösung:

Für die Punkte Q auf der Geraden g gilt: $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$

Aus der Bedingung $|\vec{n}^\circ \vec{OQ} - a| = 2$ folgt

$$\frac{1}{3}(t-2) = 2, \quad t = 8, \quad Q_1(1 | 9 | 8) \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{3}(t-2) = -2, \quad t = -4, \quad Q_2(1 | -3 | -4).$$

9. Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden g und h und wie lauten die Fußpunkte? (Abitur 2007 NDS)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$s = t = 1, \quad P(4 | 4 | -2), \quad Q(2 | 1 | 4), \quad d = 7$$