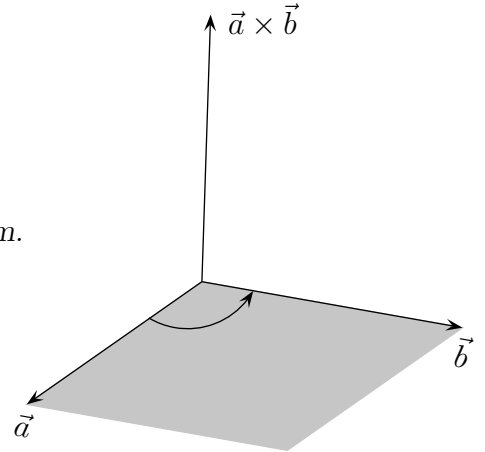


Vektorprodukt Fortsetzung

Rechenregeln:

1. Genau dann ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, wenn \vec{a}, \vec{b} kollinear sind.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4. $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$
5. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



Welche Bedeutung hat $|\vec{a} \times \vec{b}|$?

Beispiele wie $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{pmatrix}$ legen die Vermutung nahe, dass gilt:
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (Rechtecksfläche), falls $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Mit ein wenig Rechnerei kann die Vermutung bestätigt werden:

$$\left| \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \iff (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$\iff -2a_2 b_3 a_3 b_2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2$$

Aus der Voraussetzung $\vec{a} \perp \vec{b}$ folgt $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$, dann gilt auch:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = 0$$

$$\iff a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_2 b_3 a_3 b_2 + 2a_3 b_1 a_1 b_3 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 = 0 \quad \text{Alles klar?}$$

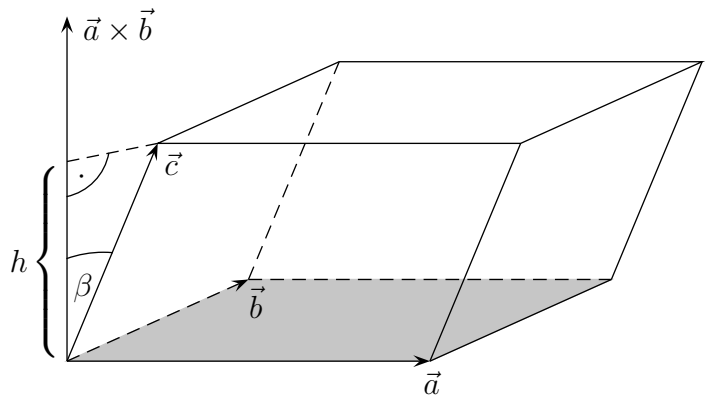
Beweise, ohne auf Koordinaten zurückzugreifen:

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}|$ (Parallelogrammfläche)
 (Tipp: $\vec{b} = \vec{c} + \lambda \vec{a}$)



Roofls

Vektorprodukt

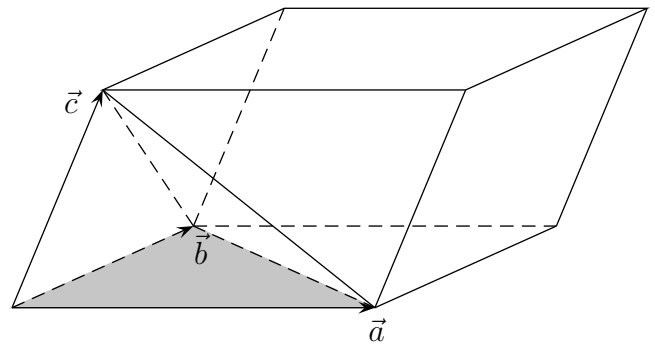


2. $V_{\text{Spat}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

(Tipp: $h = |\vec{c}| \cdot \cos \beta$)

Ein Spat ist ein gescherter Quader.

Genauer müsste der Betrag genommen werden, da beim Vertauschen der Vektoren das Ergebnis auch negativ werden kann.



3. $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Die Pyramide ist durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} festgelegt.

4. $|\vec{a} \times \vec{b}| = A_{\text{Parallelogramm}} \quad (2. \text{ Beweis})$

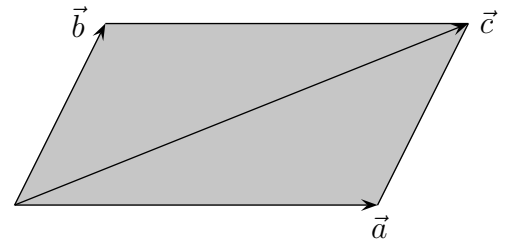
$$\iff |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha, \quad \text{da } A_{\text{Parallelogramm}} = g \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\iff (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \quad \text{Lagrange (1736 - 1813)}$$

$$\text{beachte: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \quad (\cos \alpha)^2 = 1 - (\sin \alpha)^2, \quad |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$$

Berechnung von Flächen und Volumen Zusammenfassung

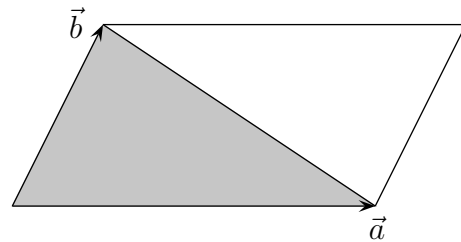
1. $A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{c}|$



2dimensional:

$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

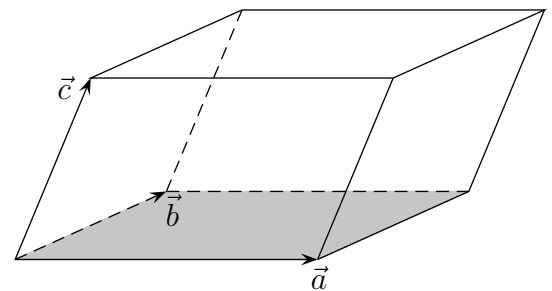
2. $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$



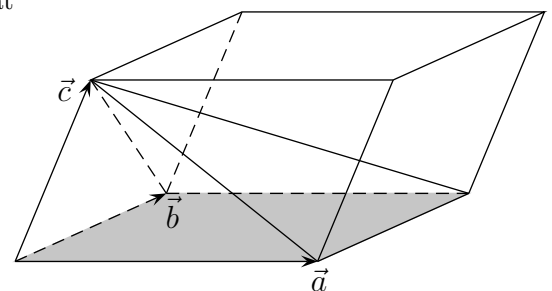
2dimensional:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

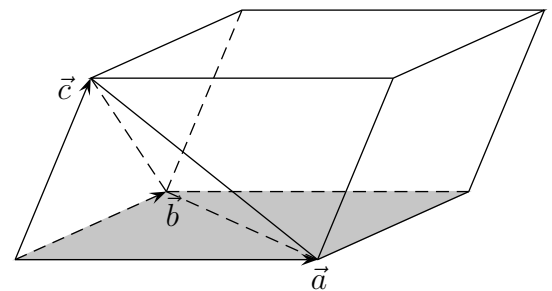
3. $V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$



4. $V_{\text{Pyramide (Grundfläche Parallelogramm)}} = \frac{1}{3} V_{\text{Spat}}$

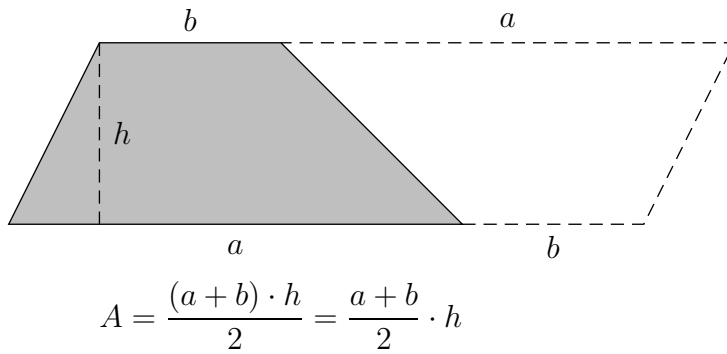
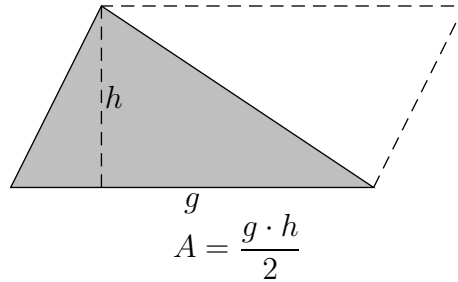
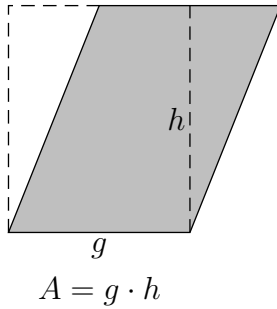


5. $V_{\text{Pyramide (Grundfläche Dreieck)}} = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}}$



$$6. \quad V_{\text{Pyramide (Kegel)}} = \frac{1}{3} G \cdot h \qquad V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Berechnung von Vierecken

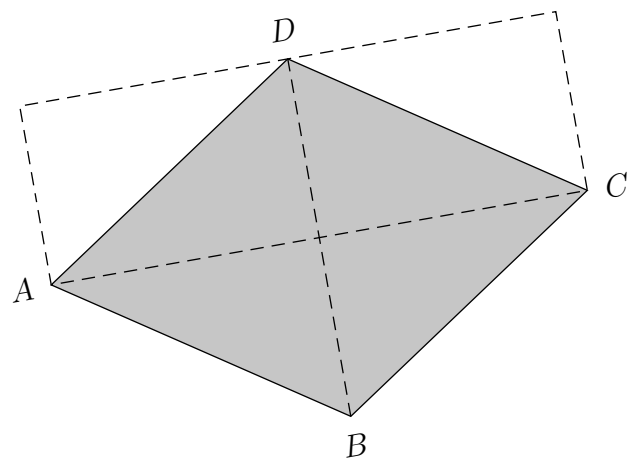


$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} |(\vec{AB} + \vec{DC}) \times \vec{AD}|$$

$$A_{\text{Raute}} = \frac{1}{2} |\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|$$



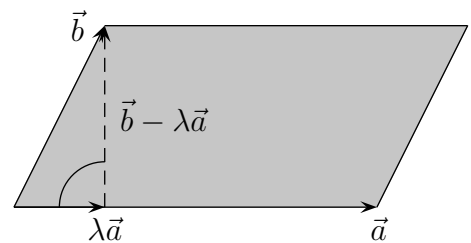
Roolfs

Vektorprodukt und Parallelogrammfläche

Erläutere das Folgende.



$$\begin{aligned} (\vec{b} - \lambda\vec{a}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a}^2} \end{aligned}$$



$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{b} - \lambda\vec{a}| \cdot |\vec{a}|$$

$$A_{\text{Parallelogramm}}^2 = (\vec{b} - \lambda\vec{a})^2 \cdot \vec{a}^2$$

= ... Klammern auflösen, zusammenfassen

$$= \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

= ... Klammern auflösen, umordnen

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b})^2$$

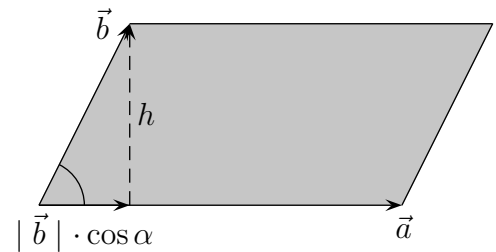
$$\Rightarrow A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Vektorprodukt und Parallelogrammfläche

Erläutere das Folgende.



$$h = \sqrt{|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$



$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a}| \sqrt{|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$

$$A_{\text{Parallelogramm}}^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2$$

$$= \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$= \dots \quad \text{Klammern auflösen, umordnen}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b})^2$$

$$\implies A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$