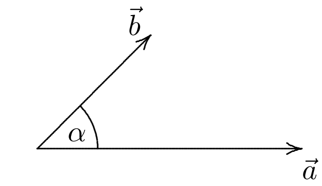
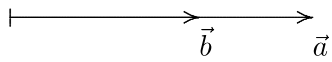
Skalarprodukt Fortsetzung



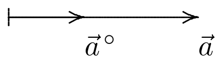
Mit dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kann der Winkel berechnet werden, den zwei Vektoren miteinander einschließen.

Zunächst untersuchen wir das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier kollinearer Vektoren.



$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\,\vec{a}\,| \cdot \vec{a}^\circ \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \vec{b}^\circ \\
&= |\,\vec{a}\,| \cdot \;|\,\vec{b}\,| \cdot \; \underbrace{\vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ}_{1} \\
&= |\,\vec{a}\,| \cdot \;|\,\vec{b}\,|
\end{aligned}$$

$\vec{a}^\circ$ ist der zu $\vec{a}$ gehörige Einheitsvektor. Das ist ein Vektor, der mit $\vec{a}$ in der Richtung übereinstimmt, jedoch die Länge 1 hat.

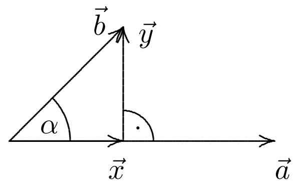


$$\vec{a}^\circ = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\,\vec{a} \qquad \text{oder} \qquad \vec{a} = |\,\vec{a}\,|\;\vec{a}^\circ$$

Es gilt: $\vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ = 1$ Beweis?

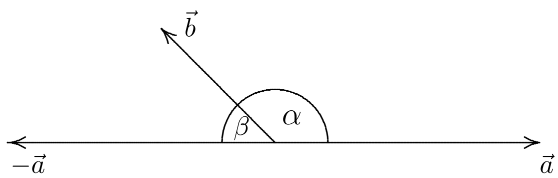
In diesem Fall ist das Skalarprodukt also lediglich das Produkt der Längen der Vektoren. Für die Behandlung des allgemeinen Falls stellen wir $\vec{b}$ als Summe zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ dar:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot\; (\vec{x} + \vec{y}\,) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{x} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{y}}_{0} \qquad (\,\vec{a} \perp \vec{y}\,) \\
&= |\,\vec{a}\,| \cdot \;|\,\vec{x}\,| \qquad (\vec{a} \textit{ und } \vec{x} \textit{ kollinear, siehe oben})
\end{aligned}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot \;|\,\vec{b}\,| \cdot \;\cos\alpha \qquad \left(\cos\alpha = \frac{|\,\vec{x}\,|}{|\,\vec{b}\,|} \quad \textit{oder} \quad |\,\vec{x}\,| = |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha\,\right)$$

Die Formel $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot \;|\,\vec{b}\,| \cdot \;\cos\alpha$ ist auch für $\alpha > 90°$ gültig.



$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= -\;(-\,\vec{a}\,) \cdot \vec{b} \\
&= -\;|\,-\vec{a}\,| \cdot \;|\,\vec{b}\,| \cdot \;\cos\beta \\
&= |\,\vec{a}\,| \cdot \;|\,\vec{b}\,| \cdot \;\cos\alpha \qquad (\,-\cos(\underbrace{180° - \alpha}_{\beta}) = \cos\alpha\,)
\end{aligned}$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

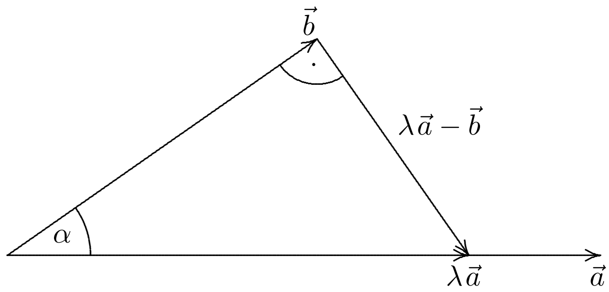
Lösungen:

1. a) $71{,}2°$ *b)* $167{,}8°$

2. $48{,}9°$; $62{,}7°$; $68{,}4°$

3. $38{,}9°$; $63{,}3°$; $116{,}4°$

Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel



Erläutere:

$$\vec{b} \perp \lambda\vec{a} - \vec{b}$$

$$\dots$$

$$\lambda = \frac{\vec{b}^2}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{b}\,|}{|\lambda\vec{a}\,|} = \frac{|\vec{b}\,|}{\lambda\,|\vec{a}\,|} \qquad \text{für positives } \lambda$$

$$\dots$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}\,||\vec{b}\,|} \qquad \text{beachte: } |\vec{b}\,| = \sqrt{\vec{b}^2} \implies \vec{b}^2 = |\vec{b}\,|^2$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

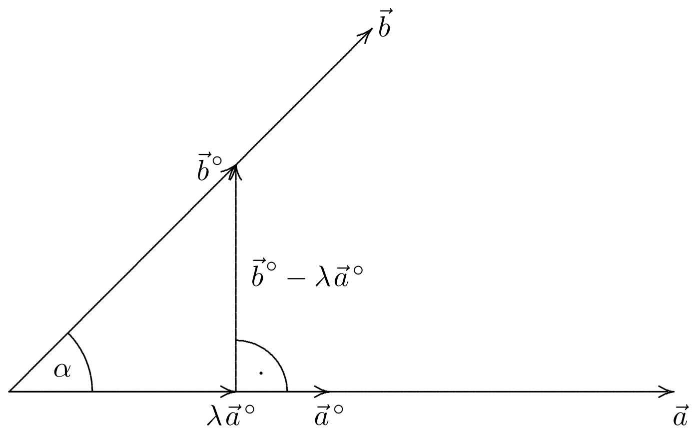
2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

Lösungen:

1. a) $83{,}8°$ b) $168{,}2°$
2. $48{,}9°$; $62{,}7°$; $68{,}4°$
3. $49{,}7°$; $57{,}4°$; $122{,}6°$

Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel



Erläutere:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{|\,\lambda\vec{a}^\circ\,|}{|\,\vec{b}^\circ\,|} = \lambda \\
\vec{b}^\circ - \lambda\vec{a}^\circ &\perp \vec{a}^\circ \\
&\dots \\
\lambda &= \vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ \qquad \text{beachte: } \vec{a}^\circ \cdot \vec{a}^\circ = 1 \\
\cos\alpha &= \vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\,\vec{b}\,|} \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha
\end{aligned}$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

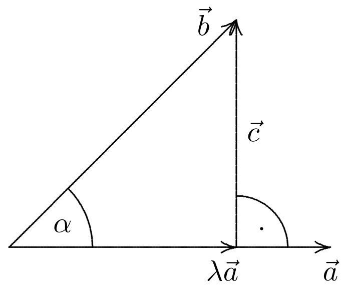
2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

Lösungen:

1. a) $83,8°$ b) $168,2°$
2. $48,9°$; $62,7°$; $68,4°$
3. $49,7°$; $57,4°$; $122,6°$

Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel



Erläutere:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{a}\cdot(\lambda\vec{a}+\vec{c}) \\
&= \lambda\vec{a}^{\,2} \\
&= \lambda\,|\,\vec{a}\,|^2 \qquad \text{für positives } \lambda
\end{aligned}$$

beachte: $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} \quad\Longrightarrow\quad \vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2$

$$\cos\alpha = \frac{\lambda\,|\,\vec{a}\,|}{|\,\vec{b}\,|} = \frac{\lambda\,|\,\vec{a}\,|^2}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-6\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-2\end{pmatrix}$

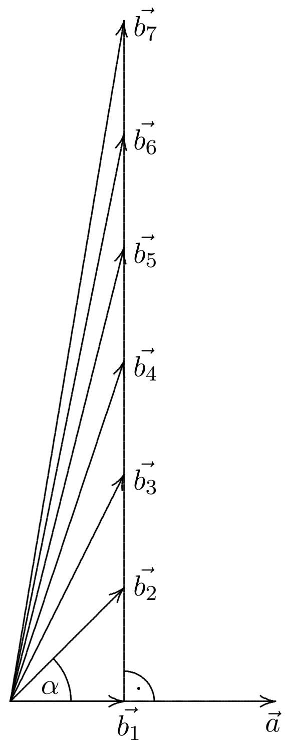
2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\5\\-5\end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

Lösungen:

1. a) $83{,}8°$ b) $168{,}2°$
2. $48{,}9°$; $62{,}7°$; $68{,}4°$
3. $49{,}7°$; $57{,}4°$; $122{,}6°$

Zum Skalarprodukt



$$\vec{b_1} \cdot \vec{a} \;=\; |\,\vec{b_1}\,| \cdot |\,\vec{a}\,| \qquad \text{(gilt stets für kollineare Vektoren)}$$

$$= \vec{b_2} \cdot \vec{a} = \vec{b_3} \cdot \vec{a} = \vec{b_4} \cdot \vec{a} = \ldots$$