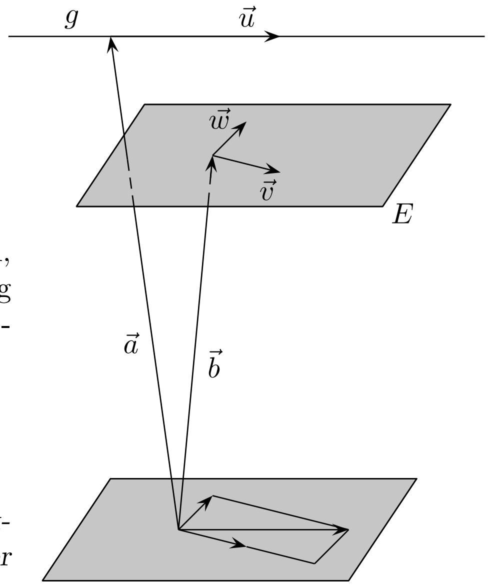
Parallelität von Gerade und Ebene

Verläuft die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

parallel zur Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Allgemeiner untersuchen wir die Frage:

Wie kann überprüft werden, ob die Gerade $g: \ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
parallel zur Ebene $E: \ \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ verläuft?



Dazu erinnern wir uns, dass Vektoren durch Pfeile dargestellt werden, die vom Ursprung ausgehen. (Nur wegen der besseren Anschauung wurden die Richtungsvektoren - genauer deren Pfeile - an die Stützvektoren angeheftet.)

Der nebenstehenden Zeichnung entnehmen wir:

Eine Gerade verläuft parallel zu einer Ebene, falls der Richtungsvektor der Geraden eine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene ist.

Oder kurz: $g \parallel E \iff \vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$

Lösung der obigen Aufgabe:

Es ist nachzuprüfen, ob es Zahlen λ und μ gibt, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Vektorgleichung kann in drei Koordinatengleichungen zerlegt werden. Aus zweien werden $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ errechnet. Diese Werte erfüllen auch die dritte Koordinatengleichung, somit gilt: $g \parallel E$.

Aufg.

Überprüfe, ob die parallele Gerade g ganz in E verläuft.

Lösung der nebenstehenden Aufgabe:

Die Gerade g verläuft ganz in der Ebene E, falls der Stützvektor der Geraden auch zur Ebene führt.

Die Bedingung lautet daher:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung ist für $\lambda = 2$ und $\mu = 2$ erfüllt.