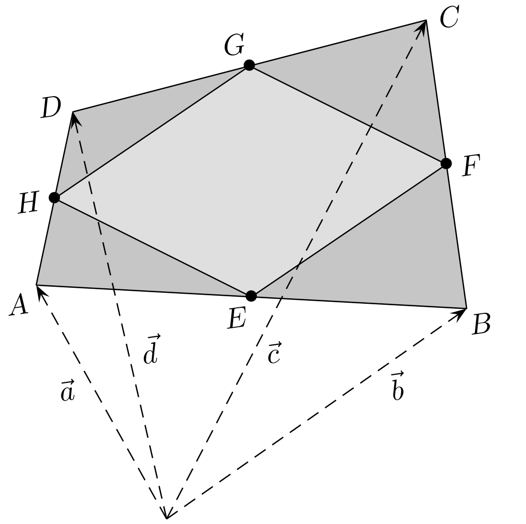
Lineare Unabhängigkeit

1. *Die Seitenmitten eines Vierecks (im Raum) sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.*

   (1731 Pierre Varignon)

   $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

   $\overrightarrow{OE} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{2}$

   $\overrightarrow{OF} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{2}$

   $\overrightarrow{OG} = (\vec{c} + \vec{d}) \cdot \frac{1}{2}$

   $\overrightarrow{OH} = (\vec{a} + \vec{d}) \cdot \frac{1}{2}$

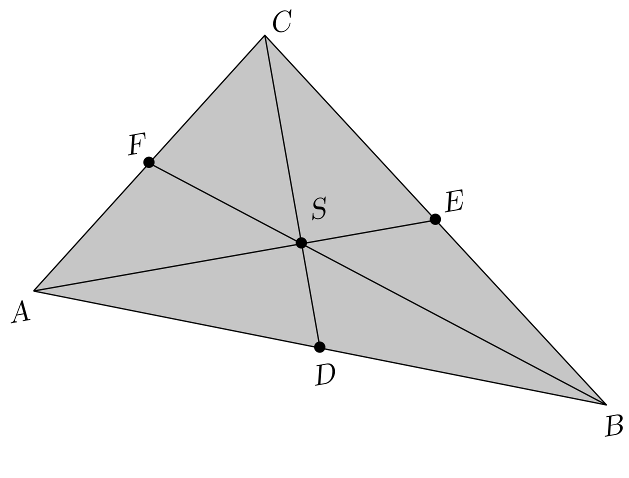
   $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \ ... \ = \ (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \frac{1}{2}$

   $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OE} = \ ... \ = \ (\vec{d} - \vec{b}) \cdot \frac{1}{2}$

   Aus den Darstellungen für $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{FG}$ ist alles zu erkennen.

2. *Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Der Schnittpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2 . Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.*

   Sei A der Ursprung und $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

   Gerade BF: $\quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda \ \overrightarrow{BF}$

   $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \, (\tfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})$

   Gerade AE: $\quad \vec{x} = \lambda \, \tfrac{1}{2} \, (\vec{a} + \vec{b})$

   Schnitt: $\quad \vec{a} + \lambda \, (\tfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}) \ = \ \mu \, \tfrac{1}{2} \, (\vec{a} + \vec{b})$

   $\iff \quad (1 - \lambda - \tfrac{1}{2}\mu) \, \vec{a} \ + \ (\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu)\vec{b} \ = \ 0$

   $\iff \quad \lambda = \frac{2}{3}, \qquad \mu = \frac{2}{3}$

   Die Gerade CD verläuft auch durch S.

Die n Vektoren $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ ... \ , \vec{a}_n$ heißen voneinander linear unabhängig, falls aus jeder Linearkombination des Nullvektors $\lambda_1 \, \vec{a}_1 \ + \ \lambda_2 \, \vec{a}_2 \ + \ ... \ + \ \lambda_n \, \vec{a}_n \ = \ 0$ folgt, dass alle λ_i null sind. Andernfalls sind sie linear abhängig.

Die n Vektoren $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ ... \ , \vec{a}_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn es eine Linearkombination des Nullvektors gibt, bei der ein (mindestens) λ_i ungleich null ist. Die Linearkombination kann dann nach $\vec{a}_i$ umgestellt werden, d. h. (mindestens) ein Vektor ist als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar.