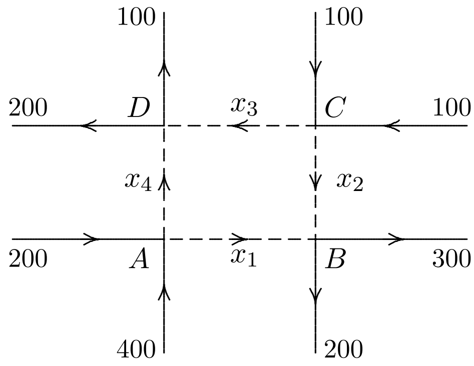
Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme spielen unter anderem eine wichtige Rolle bei der Berechnung von Netzwerken, in der Baustatik und in der Produktionsplanung. Wir bearbeiten ein Verkehrsflussproblem.

In der Skizze ist schematisch ein Straßennetz dargestellt. Dabei sollen alle Straßen Einbahnstraßen sein. Die Verkehrsdichte (Fahrzeuge pro Stunde) auf den gestrichelt gezeichneten Abschnitten soll untersucht werden. Die Verkehrsdichten der Zu- und Abfahrtsstraßen sind bekannt. Entsteht ein Stau, wenn das Straßenstück AD gesperrt wird? Welches ist die maximale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück AB?



Die mathematische Umsetzung lautet:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & & & & = & 500 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 200 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 300 \\ x_1 & + & & & & & x_4 & = & 600 \end{array}$$

Zeige, dass die letzte Gleichung entbehrlich ist, da sie sich aus den anderen ergibt.

Für die restlichen drei Gleichungen kann eine Variable frei gewählt werden, z. B. x_4, wir erhalten:

$$\begin{array}{lcl} x_3 & = & 300 - x_4 \\ x_2 & = & -100 + x_4 \\ x_1 & = & 600 - x_4 \end{array}$$

Die allgemeine Lösung des obigen inhomogenen Gleichungssystems ist:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 - x_4 \\ -100 + x_4 \\ 300 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } x_4 = k \text{ erhalten wir:} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sperrung von AD bedeutet $x_4 = 0$. Dann ist $x_2 = -100$. Was bedeutet dies?

Die Verkehrsdichte auf AB ist x_1. Es ist $x_4 \geq 100$, damit x_2 nicht negativ wird. Es folgt $x_1 \leq 500$.

$\begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$ stellt für das Gleichungssystem eine einzelne (spezielle) Lösung dar, $k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

1. Löse:

   a) $$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 18 \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$